

BUTLLETÍ

DE LA SOCIETAT CATALANA
DE MATEMÀTIQUES
Institut d'Estudis Catalans

— í n d e x —

- ☐ *Joaquim Bruna i Joan del Castillo*
Un apunt de matemàtica financera 101
- ☐ *Enrique Casanovas Ruiz-Fornells*
Definibilitat en estructures matemàtiques 133
- ☐ *Mihyun Kang i Zdeněk Petrášek*
Grafs aleatoris: teoria i aplicacions, de la naturalesa a la societat
i al cervell 155
- ☐ English summaries 179



Volum 32 • Número 2 • Any 2017



Institut
d'Estudis
Catalans

BUTLLETÍ

DE LA SOCIETAT CATALANA

DE MATEMÀTIQUES

Institut d'Estudis Catalans

Volum 32 • Número 2 • Desembre 2017

BARCELONA
2017

© dels autors dels articles

Editat per la Societat Catalana de Matemàtiques
filial de l'Institut d'Estudis Catalans
Carrer del Carme, 47
08001 Barcelona

Text revisat lingüísticament
per la Unitat de Correcció del Servei Editorial de l'IEC.

Imprès a Limpergraf, SL

ISSN: 0214-316-X
Dipòsit Legal: B 19272-1987

Són rigorosament prohibides, sense l'autorització escrita dels titulars del *copyright*, la reproducció total o parcial d'aquesta obra per qualsevol procediment i suport, incloent-hi la reprografia i el tractament informàtic, la distribució d'exemplars mitjançant lloguer o préstec comercial, la inclusió total o parcial en bases de dades i la consulta a través de xarxa telemàtica o d'Internet. Les infraccions d'aquests drets estan sotmeses a les sancions establertes per les lleis.

Índex

JOAQUIM BRUNA I JOAN DEL CASTILLO	
Un apunt de matemàtica financera.....	101
ENRIQUE CASANOVAS RUIZ-FORNELLS	
Definibilitat en estructures matemàtiques.....	133
MIHYUN KANG I ZDENĚK PETRÁŠEK	
Grafs aleatoris: teoria i aplicacions, de la naturalesa a la societat i al cervell...	155
English summaries	179

Un apunt de matemàtica financera

JOAQUIM BRUNA I JOAN DEL CASTILLO

Resum: Cap als anys setanta del segle passat, el món de les finances experimentà una revolució amb la generalització i amb la comercialització dels productes financers derivats i, sobretot, amb la introducció del model de Black-Scholes per a fer-ne la valoració. L'objectiu d'aquest article és descriure aquest model d'una manera autocontinguda i tan elemental com sigui possible, seguint bàsicament Cox, Ross i Rubinstein [6]. Això requereix parlar prèviament del model de Samuelson per als actius subjacents, que utilitza el moviment brownià geomètric. Al final fem unes consideracions sobre la validesa d'aquests models i com s'utilitza avui en dia la fórmula de Black-Scholes a la pràctica diària.

Paraules clau: llei normal, moviment brownià, processos estocàstics, actius financers, valoració d'opcions, arbitratge, model de Black-Scholes, cobertura de risc.

Classificació MSC2010: 91G20, 91G60, 91G70.

1 Observant els mercats financers

L'economia real tracta de la producció, la distribució i els intercanvis de béns i serveis. Aquests intercanvis varen fer néixer el diner, justament per a facilitar-los. Amb el diner neixen els instruments financers (diferents formes de diner), els quals originen les institucions financeres, que tracten de protegir-lo i assegurar-lo. Es pot dir que les finances no són més que l'estudi de l'evolució temporal de les diferents formes de diner.

Una descripció dels mercats financers per a matemàtics ha de començar amb la fórmula de l'interès compost continu, és a dir, la fórmula del creixement del diner sense risc. Thomas Edison (inventor i, sobretot, home de negocis) considerava que aquesta era la fórmula més important de les matemàtiques.

Anomenem r_a el tipus d'interès compost anual, que en àmbits financers es coneix com a *interès TAE*. Si avui tenim uns estalvis en un dipòsit bancari D_0 en anys successius tindran un valor

$$D_n = D_0(1 + r_a)^n.$$

Evidentment, aquesta expressió també té sentit per a períodes de temps t que no siguin múltiples enters de l'any. Matemàticament és més entenedor posar $1 + r_a = e^r$, és a dir, $r = \ln(1 + r_a)$, de forma que

$$D_t = D_0 e^{rt}, \quad (1)$$

aleshores podem escriure

$$\frac{dD_t}{dt} = rD_t \iff \frac{dD_t}{D_t} = r dt,$$

que diu que el diner (sense risc) rendeix en cada instant amb taxa r i per això r s'anomena l'*interès continu*. Estrictament, com que $e^r \geq 1 + r$, tenim que $r_a > r$. De fet, atès que

$$e^r = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{r}{n}\right)^n,$$

r pot ser interpretat també com un tipus d'interès anual simple, inicial, que fet compost, pagat de forma contínua, dona lloc a $r_a > r$. A vegades sentim parlar del tipus d'interès compost mensual r_m , que evidentment no és $\frac{r_a}{12}$ sinó definit per la igualtat

$$1 + r_a = (1 + r_m)^{12}.$$

Després de l'interès compost hem de parlar d'accions i de la borsa. Quan una empresa necessita finançament per a realitzar una inversió pot acudir al mercat primari de capitals per emetre títols de propietat o vendre accions. Aquest procediment permet obtenir recursos estables i la retribució als inversors està en funció del benefici que produirà la inversió (repartiment de dividends). Per tal que una empresa sigui autoritzada a vendre accions i esdevenir una societat per accions (o societat anònima) cal que estigui sotmesa a controls i presentar de forma regular informació suficient perquè els possibles contractants puguin saber què els ofereixen. Normalment només les grans empreses s'acullen a aquestes exigències. Un cop emeses les accions, aquestes s'intercanvien en la borsa i el seu preu s'ajusta a l'oferta i la demanda. D'aquesta manera es produeixen oscil·lacions que recullen diàriament els mitjans de comunicació. Els índexs borsaris que sovint sentim anomenar en els mitjans de comunicació, com ara l'Ibex 35, el Dow Jones, etc., són mitjanes, en general ponderades segons el seu nivell d'importància, dels valors de les accions de les empreses que hi entren.

Tot i que la unitat de temps en finances és l'any, la informació és seguida a temps continu, i es diu que una notícia deixa de tenir valor econòmic al cap d'un quart d'hora. Així, anomenarem $S(t)$ (o bé S_t , de l'anglès *stock*) el preu d'un determinat actiu financer en l'instant de temps t . Es parla de *dades d'alta freqüència* quan les observacions són fetes a intervals inferiors al dia. El més habitual, però, és treballar amb els preus dels actius al final del dia, anomenats *preus de tancament*.

Suposarem de moment que hem observat una sèrie temporal diària de dades de tancament S_t , on t pren valors enters de 0 a n . La *rendibilitat neta* de l'actiu en un determinat dia t és

$$R_t = (S_t - S_{t-1})/S_{t-1},$$

és a dir, $S_t = (1 + R_t)S_{t-1}$. Aquesta és la rendibilitat a la qual es refereixen diàriament els mitjans de comunicació en relació amb les empreses o els índexs borsaris. Definirem la rendibilitat contínua, o simplement *rendibilitat*, com

$$r_t = \ln(1 + R_t) = \ln \frac{S_t}{S_{t-1}} = s_t - s_{t-1}, \quad (2)$$

on $s_t = \ln S_t$ s'anomenen els *log-preus*. Per la fórmula de Taylor, $r_t = \ln(1 + R_t) \approx R_t$, per tant, aquestes quantitats no es diferencien gaire des del punt de vista pràctic.

La figura 1 mostra l'evolució diària dels preus de l'Ibex des dels seus orígens fins al 30 de juny del 2016. Aquest és un exemple de l'evolució del diner amb risc. Pot observar-se que en aquesta sèrie queden reflectits els impactes sobre els preus de les empreses dels fets econòmics i polítics més rellevants, que omplen les planes dels mitjans de comunicació. Per exemple, el 10 de setembre del 1998 es produeix la suspensió de pagaments del deute de Rússia; això provoca una caiguda de la borsa espanyola d'11000 a 7000 punts i els inversors perden en uns dies un 36% dels seus estalvis. Aquest esdeveniment va produir la caiguda de Long Term Capital Management, empresa model en aquells anys assessorada per Myron Scholes i Robert Merton, que havien estat guardonats el 1997 amb el Premi Nobel per la seva contribució a la valoració de derivats.

Fins a mitjans del segle passat, el comportament de la borsa, la *tendència* que segueix un determinat actiu, es va intentar predir a partir de l'estudi de les gràfiques de les cotitzacions de les empreses o dels índexs tal com el de la figura 1, i extrapolant d'alguna forma. Però, és clar, aquestes gràfiques descriuen la història passada i el passat no determina el futur. Per això les previsions fetes a partir de gràfiques (quelcom que s'anomena l'*anàlisi tècnica*) no són gaire de fiar. Tampoc no és determinant en el comportament del preu de les accions el coneixement dels balanços, comptes de resultats i informació exhaustiva de les empreses (el que s'anomena l'*anàlisi fonamental*, vegeu [11]). Passa una mica com en el futbol, on conèixer tota la informació relativa als jugadors, entrenadors, directius i massa social dels clubs no fa pas guanyar diners a les travesses.

Als anys cinquanta, Markowitz (premi Nobel el 1990, juntament amb Sharpe i Miller) introdueix una idea nova per a l'estudi de l'evolució de les cotitzacions borsàries. Aquesta és la idea de *risc*, idea que en estadística coneixem com a *variabilitat*. A partir d'aquest moment la tendència deixa de ser l'únic objectiu de l'atenció dels inversors, per a centrar-se en el binomi tendència i risc. L'estudi de la tendència continua fent-se sota els noms d'*anàlisi tècnica* i d'*anàlisi fonamental*, però la idea de mesurar el risc associat a uns possibles guanys cada cop és més acceptada.

Els treballs de Markowitz, Sharpe i Lintner són la base del que s'anomena avui la *teoria moderna de carteres (portfolios)*, que tracta d'optimitzar el rendiment d'una cartera d'accions un cop fixat un cert nivell de risc. La teoria mostra clarament els avantatges de diversificar les inversions, tal com recull la dita «Cal no posar tots els ous al mateix cistell». De fet, hom pot fer veure que la millor inversió en renda variable de baix risc és seguir l'índex del mercat dins de la pròpia divisa. És a dir, dins de la zona euro, comprar una cistella d'accions que repliqui l'índex Euro Stoxx 50, de les 50 empreses europees més importants.

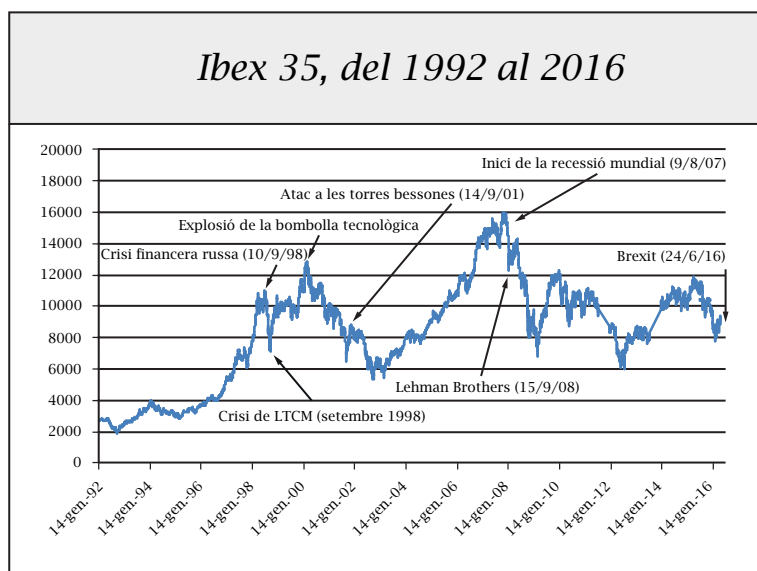


FIGURA 1: Ibex 35, des del començament de l'índex fins a mitjans del 2016.

2 Modelització dels actius de renda variable

Donar un model útil dels mercats financers no és una tasca fàcil. A diferència dels models per a l'economia, els mercats financers són essencialment impredecibles; d'això en parlarem a la secció 9 (el nostre company C. Simó acostuma a dir que la raó és que la mala fe de les persones és difícilment modelitzable matemàticament). El model bàsic que s'ha acabat imposant, després del treball de Black i Scholes el 1973 [4], que descriurem més endavant, és el *passeig aleatori*. És significatiu constatar que hem arribat a aquest model tres quarts de segle després que Louis Bachelier essencialment el formulés en la seva tesi [2].

Efectivament, Paul Samuelson treballava al MIT als anys cinquanta quan va tenir notícia de la tesi de Louis Bachelier, «Théorie de la spéculation»,

defensada el 29 de març del 1900 a la Universitat de París. Aquesta tesi, que havia quedat oblidada, va tenir una profunda influència en el treball que Samuelson estava realitzant i a través d'ell també va arribar als economistes i en particular als seus alumnes, entre els quals destaquen Robert Merton i Myron Scholes, mencionats anteriorment, el primer dels quals va fer la contribució fonamental [12]. El que havia fet Bachelier, més de cinquanta anys enrere, era donar un model per a l'evolució dels actius financers basat en el que avui en diem un *passeig aleatori*. Des de Samuelson (premi Nobel d'economia el 1970, el primer americà en aconseguir-lo) el model fonamental per als actius financers postula que les rendibilitats es distribueixen com a variables aleatòries gaussianes independents.

2.1 El model discret

De moment ens centrarem en un model discret en el qual hem fixat la unitat temporal d'un dia, i utilitzem la notació S_t . Més endavant passarem a la unitat temporal d'un any, amb la notació $S(t)$, suposant, com és habitual, que el nombre de dies de negoci de l'any són 250. Així $S_t = S(t/250)$ per al preu del dia t , $t = 0, 1, 2, \dots, n$.

El postulat introduït per Samuelson és que les variables r_t tenen una llei normal i són independents:

$$r_t \sim N(\mu_d, \sigma_d^2), \text{ independents.} \quad (3)$$

Els paràmetres μ_d i σ_d són el valor mitjà i la desviació típica diaris. Donat que μ_d i σ_d no depenen del temps t , direm que la successió $\{r_t\}$ és *estacionària*.

Aleshores, iterant a partir de (2),

$$S_t = S_{t-1} + r_t \quad \Rightarrow \quad S_t = S_0 + \sum_{i=1}^t r_i \quad (4)$$

és una suma de variables aleatòries independents, amb la mateixa llei normal. Direm doncs que la successió $\{S_t\}$ és un procés amb increments independents, estacionaris i gaussians, o també que és un *passeig aleatori (gaussià)* amb esperança μ_d i desviació típica σ_d . Suposant que $t = 0$ correspon al dia inicial i que $s_0 = \ln S_0$ és conegut, i tenint en compte que la suma de variables aleatòries independents normals és també normal, resulta que s_t té distribució gaussiana, amb esperança, variància i desviació estàndard donades per

$$E(s_t) = s_0 + t\mu_d, \quad V(s_t) = t\sigma_d^2, \quad \text{sd}(s_t) = \sqrt{t}\sigma_d.$$

Veiem, per tant, que μ_d és el pendent de $E(s_t)$, i per això s'anomena també la *tendència*. Aquest és un dels resultats fonamentals ja trobat per Bachelier: els guanys (o millor dit l'esperança de guany), representats per $t\mu_d$, creixen com t , i els riscos, representats per $\sqrt{t}\sigma_d$, creixen com $\sqrt{t}$; vegeu la figura 2. És a dir, a llarg termini (t gran) la tendència dominarà sobre el risc, per això es diu que la borsa és una inversió que cal fer a llarg termini.

Donat que la unitat de temps en finances és l'any, anualitzarem els paràmetres a partir de

$$\mu_a = 250\mu_d, \quad \sigma_a^2 = 250\sigma_d^2, \quad (5)$$

on μ_a representa ara la *tendència* anual del procés de log-preus i σ_a^2 la seva variància anual, anomenada en aquest context *volatilitat*. D'aquesta forma, si el temps el mesurem en anys, tindrem que a escala logarítmica $s(t)$ té distribució normal amb paràmetres $s(0) + t\mu_a$ i $\sqrt{t}\sigma_a$. Una variable aleatòria Y que és de la forma $Y = e^X$, amb X una variable normal, s'anomena *variable de tipus log-normal*. Així, a escala natural $S(t) = e^{s(t)}$ té una distribució log-normal. S'ha de parlar compte que els paràmetres de la llei de $s(t)$ ja no representen l'esperança i variància de $S(t)$. Podem calcular l'esperança de $S(t)$ utilitzant que l'esperança d'una variable aleatòria $g(X)$, funció d'una altra variable aleatòria X amb funció de densitat f_X , és

$$E(g(X)) = \int g(x)f_X(x) dx. \quad (6)$$

En el nostre cas podem escriure $S(t) = e^{s(t)} = e^{s(0)+t\mu_a+\sqrt{t}\sigma_a Z} = S(0)e^{t\mu_a}e^{\sqrt{t}\sigma_a Z}$, amb Z normal estàndard $N(0, 1)$. Per tant,

$$E(S(t)) = S(0)e^{t\mu_a} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{\sqrt{t}\sigma_a x} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx,$$

i completant quadrats trobem

$$E(S(t)) = S(0)e^{t(\mu_a + \frac{1}{2}\sigma_a^2)} = S_0 e^{\mu t}, \quad (7)$$

on $\mu = \mu_a + \frac{1}{2}\sigma_a^2$ és el valor esperat de la taxa de creixement (o decreixement) de la inversió mantinguda durant un any (compareu la fórmula amb (1)).

Tot seguit veurem què ens diu aquest model sobre les dades de la figura 1. La sèrie històrica de «preus» diaris S_t de l'Ibex 35 va del 14 de gener del 1992 fins al 30 de juny del 2016, i en aquest temps l'índex evoluciona de $S_0 = 2693$ fins a $S_n = 8163$ punts. El màxim de la sèrie és 15895 i es produeix el 6 de novembre del 2007. Són més de 24 anys, aproximadament 6000 observacions ($n = 5942$). A partir d'aquesta sèrie dels S_t calculem les rendibilitats $r_t = \ln \frac{S_t}{S_{t-1}}$, que són mostres de variables normals $N(\mu_d, \sigma_d^2)$ independents, segons el model (3). A continuació fem una estimació de μ_d, σ_d utilitzant els estimadors habituals de la mitjana i la variància (vegeu [13]):

$$\hat{\mu}_d = \bar{r} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n r_t, \quad \hat{\sigma}_d^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{t=1}^n (r_t - \bar{r})^2,$$

i obtenim una mitjana de $\hat{\mu}_d = 1.87 \times 10^{-4}$ i una desviació estàndard de $\hat{\sigma}_d = 1.46 \times 10^{-2}$; aquests valors són, per tant, una estimació de la rendibilitat mitjana diària de l'Ibex μ_d i de la desviació estàndard diària σ_d . Així, a partir de (5), obtenim les estimacions de la rendibilitat mitjana anual i de la volatilitat

$$\hat{\mu}_a = 4.67 \times 10^{-2}, \quad \hat{\sigma}_a = 23.02 \times 10^{-2}.$$

Això ens diu d'una banda que l'lbex durant aquests 24 anys ha estat pujant, a escala logarítmica, una mitjana de 4.67% per any i que el veritable creixement anual de l'lbex, μ_a , a escala logarítmica, es troba amb un 95% de confiança entre

$$\hat{\mu}_a \pm 1.96 \frac{\hat{\sigma}_a}{\sqrt{24}} = (-4.55\%, 13.88\%).$$

Realment, per a fer previsions de futur ens interessaria conèixer μ_a , però amb el coneixement de tota la història de l'índex no estem segurs ni que aquest valor sigui positiu!; l'estimem en el 4.67%, però en aquesta estimació hi ha un soroll del 23.02%. Tot i això, per a fer previsions no tenim altre camí que fer servir les estimacions com si fossin els valors reals, sense oblidar les incerteses que les acompanyen.

El pas següent és avaluar quin és el valor esperat d'una inversió de $S(0) = S_0 = 100$ en lbex d'ací a un any, utilitzant (7), amb $\hat{\mu} = \hat{\mu}_a + \frac{1}{2}\hat{\sigma}_a^2 = 0.73 \times 10^{-2}$. Deduïm que $E(S(1)) = 100e^{0.0732} = 107.6$, és a dir, avui en dia cal esperar que en un any 100 euros en lbex es transformin en 107.6 euros.

Per complementar el possible optimisme que el càlcul anterior ha donat dels valors esperats, tot seguit calcularem la probabilitat de perdre diners invertint en lbex a un any vista, $\Pr(S(1) < S(0))$, utilitzant els mateixos valors estimats dels paràmetres; si Z designa la llei normal estàndard $N(0, 1)$ obtenim

$$\Pr(S(1)/S(0) < 1) = \Pr(Z < -\mu_a/\sigma_a) \approx 42\%,$$

resultat que segurament ens refreda l'optimisme.

2.2 El model continu

Fins ara hem estat considerant períodes de temps que són múltiples enters de la unitat temporal. El model donat per (3) i (4) és equivalent a dir que els log-preus $s(t)$ són variables normals que compleixen

$$E[s(t)] = s_0 + t\mu_a, \quad V[s(t)] = t\sigma_a^2, \quad \text{cov}[s(t_1), s(t_2)] = \min\{t_1, t_2\}\sigma_a^2, \quad (8)$$

que en aquest context discret s'anomena *passeig aleatori discret i gaussià*. Aquí, $\text{cov}(X; Y)$ designa la covariància de les dues variables X, Y , que es defineix per $E(XY) - E(X)E(Y)$. Donada la continuïtat de les transaccions en un àmbit mundial, és lògic plantejar-se sèries temporals amb increments de temps cada cop més petits. Podem subdividir els intervals diaris passant a intervals d'una hora, un minut, un segon, etc. Així, el model a temps continu és el mateix, (8), considerant que la variable t varia contínuament a $[0, +\infty)$. En aquest punt recordem algunes nocions generals rellevants (vegeu també [10] i [14]).

En general, una família de variables aleatòries $X(t)$ dependent d'un paràmetre $t \in [0, +\infty)$ s'anomena *procés estocàstic*. Segurament el més important és l'anomenat *procés de Wiener (o brownià estàndard)*, $W(t)$, caracteritzat per les propietats següents:

- $W(0) = 0$.
- $W(v) - W(u)$ és independent de $W(t) - W(s)$ sempre que $v > u \geq t > s$ (increments independents).
- $W(t) - W(s)$ té distribució $N(0, t - s)$, per a tot $t > s$ (increments estacionaris i gaussians).

La demostració rigorosa de l'existència d'aquest procés fou feta per Wiener. També està caracteritzat dient que és un procés gaussià que compleix (8) amb $\mu = 0$ i $\sigma^2 = 1$,

$$E[W(t)] = 0, \quad V[W(t)] = t, \quad \text{cov}[W(t_1), W(t_2)] = \min\{t_1, t_2\}.$$

Així com d'una variable aleatòria n'observem valors, que són números, cada realització (o trajectòria) ω d'un procés estocàstic $X(t)$ és una funció $t \rightarrow X_\omega(t)$, on $X_\omega(t)$ és un valor observat de $X(t)$. El procés de Wiener té quasi per a tot trajectòries contínues no derivables (aquí no entrem en el tema delicat de precisar en quin espai de probabilitat estan definides les variables $W(t)$).

El *moviment brownià* (aritmètic) $B(t)$ no és més que el procés de Wiener amb tendència μ i variància σ^2 , $B(t) = \mu t + \sigma W(t)$. El nom prové del botànic anglès Robert Brown, que va descriure el moviment d'una petita partícula (per exemple, el pollen) totalment immersa en un líquid o gas. Albert Einstein va explicar sobre bases científiques aquest moviment i posteriorment Norbert Wiener va fer-ne el tractament matemàtic. D'una manera simplificada, un moviment brownià és un procés $B(t)$ amb $B(0) = 0$ tal que $B(t + s) - B(s)$ té llei normal $N(t\mu, t\sigma^2)$ i és independent de $B(x)$, per a $x \leq s$.

Actualment, després de Samuelson, es postula que els log-preus d'un actiu a l'instant $t, s(t)$, segueixen, tal com diu (8), un moviment brownià amb tendència μ_a i volatilitat σ_a^2 , paràmetres que s'estimen com hem vist anteriorment. Alternativament, hom diu que $S(t) = e^{s(t)}$ segueix un *brownià geomètric* de tendència $\mu = \mu_a + \frac{1}{2}\sigma_a^2$ i volatilitat σ_a^2 . El model va ser acceptat per tot-hom després del treball de Black i Scholes [4] i per això en direm *model de Black-Scholes*.

El model del moviment brownià era, de fet, el proposat per Bachelier [2] per als mercats financers, ja abans que Einstein, però el postulava per als preus enlloc de fer-ho per als log-preus. Suposant gaussianitat per a $s(t) = \ln S(t)$, tal com es fa avui, s'evita que els preus puguin arribar a ser negatius, i a més els logaritmes transformen la multiplicació en suma. Més significativament, el postulat que la diferència $S(t + h) - S(t)$, amb h fix, tingui una llei independent del valor actual $S(t)$ no s'adiu amb la intuïció financera. Qui creuria, per exemple, que la probabilitat que una acció que avui val 100 passi a valer demà 75 (una pèrdua del 25%) sigui la mateixa que la probabilitat que si avui val 200 demà passi a valer 175 (pèrdua del 12.5%)?

El model que estem descrivint és estocàstic, per això no ens diu què passarà, sinó *què pot passar* i amb quina probabilitat, ens dona idea de com poden anar les coses. Una particularitat del model és que es pot *simular* de manera senzilla per a visualitzar escenaris futurs i analitzar si una estratègia d'inversió

té possibilitats d'èxit. La figura 2 mostra l'evolució de l'Ibex els dos darrers anys (línia més gruixuda) juntament amb 10 escenaris alternatius que *a priori* eren igualment probables; els intervals de confiança mostren el creixement de la desviació estàndard com l'arrel quadrada del temps. Una altra propietat fonamental del model és que es pot *contrastar amb la realitat*, tal com han de ser tots els models científics. Avui està a l'abast de tothom obtenir dades històriques de cotitzacions borsàries amb què calcular les rendibilitats; aleshores podem acudir a l'estadística per obtenir un ampli ventall de proves que ens diran si realment les rendibilitats es comporten com una mostra d'observacions independents d'una distribució normal. A la secció 9 ho seguirem comentant.

Ibex, més 10 simulacions

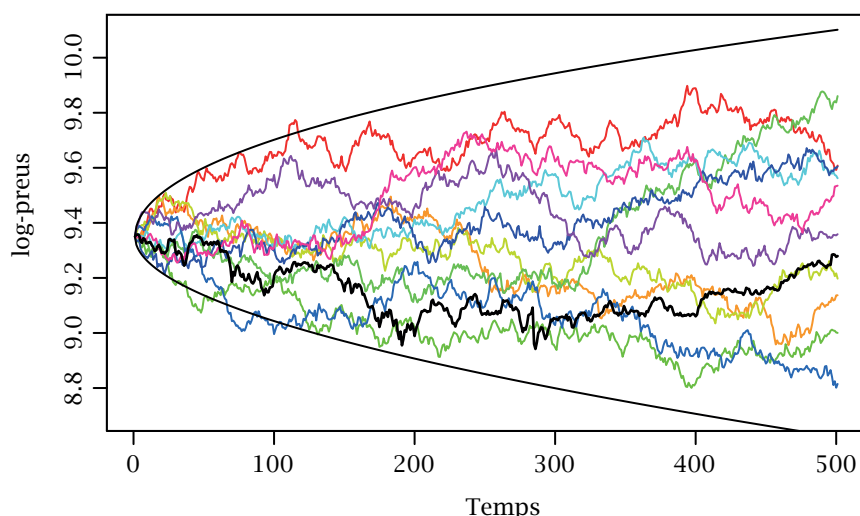


FIGURA 2: Ibex (línia gruixuda) des d'abril del 2015 a abril del 2017 i 10 simulacions alternatives. Les línies contínues són els intervals de confiança del 95%.

3 Els derivats. Noció d'arbitratge

La gran revolució en el món de les finances es produeix amb l'aparició del primer mercat organitzat de derivats el 1973 a Chicago. El mateix any Black i Scholes publiquen el seu primer article sobre la valoració d'opcions sense arbitratge, que explicarem més endavant. El gran impacte que va produir aquesta publicació ha fet que els models amb què s'estudien avui els mercats de derivats segueixin el llenguatge establert en aquest article, que es basa en la versió a temps continu del model del qual hem parlat a la secció anterior, introduït per Samuelson el 1965. Robert Merton i Myron Scholes rebrien el 1997 el Premi Nobel per les seves contribucions a la valoració de derivats. Fischer Black va morir el 1995. Gran part del que segueix a continuació es pot trobar ampliat en les referències [1], [6], [9] i [11].

Per tenir una perspectiva històrica del moment recordem que el 15 d'agost del 1971 el president Nixon declara la no convertibilitat del dòlar en or. Des dels acords de Bretton Woods, el juliol del 1944, es mantenia la relació 35 \$ per unça d'or, relació que era de 310 \$/unça l'octubre del 2002 i de 1200 \$/unça l'agost del 2016. El fet va comportar el creixement de la inflació i l'atur. En el període 1974-1975 la inflació era del 12% als EUA; a l'Estat espanyol la inflació va pujar del 7% el 1970, fins al 26% el 1977. El març del 1973 es decideixen els tipus de canvi flotants i comença la pujada del marc alemany. Es produeix la crisi del petroli del 1973 i la suspensió de pagaments dels països en vies de desenvolupament.

El final de la paritat or/dòlar va portar grans oscil·lacions de preus en les matèries primeres i en els actius financers. Neix així la necessitat de protegir-se davant les grans oscil·lacions dels preus dels cereals, en particular del blat, molt important als EUA. Això es pot fer privadament mitjançant un *contracte a termini (forward)*. Per exemple, entre un agricultor i un pastisser, que fixen abans de la sembra el preu a què el primer vendrà el blat al segon, un cop segat. L'agricultor s'assegura uns ingressos que li permeten fer inversions en terres, abonaments, material, etc. El pastisser pot comprometre's a unes vendes a preu fix a restaurants, hotels ...

Un contracte a termini és doncs un contracte fet a temps zero pel qual ens obliguem a comprar/vendre a temps T un determinat actiu. Quin ha de ser el preu? Bé, si a temps zero l'actiu val $S(0)$, el preu just és $F = S(0)e^{rT}$, suposant que el rendiment del diner sense risc és r . En efecte, si $F \neq S(0)e^{rT}$, es pot fer negoci sense risc: si $F < S(0)e^{rT}$, una persona que té l'actiu el ven a preu $S(0)$, posa $S(0)$ al banc i signa el contracte de futur (com a comprador). A temps T , té $S(0)e^{rT}$ diners al banc, dels quals en gastarà F per tornar a tenir l'actiu. Ha passat de tenir l'actiu a tenir l'actiu més un benefici de $S(0)e^{rT} - F$. I si $F > S(0)e^{rT}$, algú que no té res pot guanyar diners sense córrer cap risc: demana $S(0)$ al banc, amb això compra l'actiu i ven un contracte de futur. A temps T , cobrarà F pel seu actiu i deurà $S(0)e^{rT}$ al banc, amb la qual cosa haurà fet un benefici de $F - S(0)e^{rT}$. Observem que estem fent tàcitament una hipòtesi, que és que en el mercat sempre podem operar sense limitacions i a la taxa lliure de risc.

Aquest «fer negoci sense risc» es coneix amb el terme *arbitratge*. Per entendre millor el concepte posem un altre exemple. Un industrial, al cap de 90 dies, ha de pagar un milió de lliures a un proveïdor. Per a disminuir la incertesa, farà, avui, un contracte a termini amb un banc per a comprar un milió de lliures d'aquí a $T = 90$ dies, a una determinada taxa de canvi F . Quina taxa de canvi F sembla justa? Mirem el preu d'una lliura esterlina en una publicació especialitzada. Podem llegir:

$$\begin{cases} \text{Avui : } S = 1.322 \text{ euros.} \\ \text{A 90 dies : } F = 1.333 \text{ euros.} \end{cases}$$

L'industrial pagarà la lliura esterlina a un preu lleugerament superior al d'avui; però, d'on surt aquest preu F ? Té a veure amb la *diferència* entre els rendiments r , s del diner sense risc als Estats Units i al Regne Unit. Ha de ser $F = Se^{(r-s)T}$. Si no és així, podem fer *arbitratge*, negoci sense arriscar. En efecte, si $Fe^{sT} < Se^{rT}$, anirem a un banc anglès, demanarem X lliures en préstec, les convertim en XS euros que posem en un banc espanyol. Al mateix temps fem un contracte de futur a Espanya per a comprar Xe^{sT} lliures. A temps T tindrem XSe^{rT} euros al banc espanyol, dels quals XFe^{sT} els utilitzarem per a comprar Xe^{sT} lliures que tornarem al banc anglès per pagar el deute. Hem guanyat $X(Se^{rT} - Fe^{sT})$ euros sense arriscar res. I si $Fe^{sT} > Se^{rT}$, anirem a un banc espanyol i demanarem XSe^{-sT} euros en préstec, que utilitzarem per a comprar Xe^{-sT} lliures, que posarem en un banc anglès. Al mateix temps venem un contracte per a la compra de X lliures. A temps T , tindrem X lliures al banc anglès, que donarem al comprador del contracte a termini per XF euros. En aquest moment haurem de pagar XSe^{rT-sT} al banc espanyol, i ens queda un benefici net.

Hi ha contractes a termini sobre matèries primeres, or, plata ... fins arribar als *futurs* sobre índexs i productes financers. El 1992 s'obre a Barcelona i a Madrid el mercat espanyol de futurs financers, el MEFF. Per aquelles dates es construïa també per primer cop l'índex Ibex 35 de la Borsa espanyola. Les coses evolucionen de pressa després de les últimes crisis del 1987 i 1989. Es creen els primers fons d'inversió i la borsa s'obre als petits estalviadors.

Considerarem amb un cert detall un producte derivat concret, una *opció de compra o venda*. Una opció de compra (*call option*) d'un determinat actiu financer és un contracte fet a temps zero que dona al comprador el dret a comprar a temps de venciment T (*expiration date, maturity*) una unitat de l'actiu a preu K (*exercise price, strike price*). Hem d'emfatitzar el fet bàsic que és que en aquest tipus de contracte el comprador té el dret de comprar però no l'obligació de fer-ho, a diferència del contracte de futur. Així, si a temps T el preu de l'actiu és $S(T) > K$, el comprador exerceix l'opció, i el venedor li ha de vendre l'actiu a preu K . Si el preu de l'actiu és $S(T) < K$, l'opció no és exercida i no té cap valor. El venedor de l'opció corre un risc evident, perquè a temps T , si el comprador l'exerceix, haurà de vendre els actius per sota del preu de mercat. Naturalment, el comprador ha d'abonar al venedor una *prima* C per a tenir el dret de compra i que d'alguna manera serveixi al venedor per a cobrir-se del risc. Una *opció de venda* (*put option*) dona el dret a vendre. Les opcions *europnees* només es poden exercir al venciment, les opcions *americanes* es poden exercir en qualsevol moment abans del venciment.

El comprador de l'opció pot ser el nostre industrial que fa una opció per a adquirir el milió de lliures a temps $T = 90$ dies; les comprarà amb independència de si la lliura ha pujat o baixat i el que busca és reduir la incertesa a canvi de pagar la prima. Però també pot ser un especulador que fa una aposta, que li costa C a temps $T = 0$; si $S(T) > K$ exerceix l'opció, compra a preu K i, venent immediatament a preu de mercat, fa un benefici de $S(T) - K$ (del qual ha de descomptar C). Si $S(T) < K$, no l'exerceix i ha perdut l'aposta (i C).

En general, els derivats serveixen per a cobrir riscos, detectar-los, traspassar-los i posar-los preu. Els riscos no desapareixen, es traslladen. Si inicialment serveixen per a protegir-se d'algun risc, automàticament serveixen per a invertir o per a especular i també serveixen per a moure més de pressa els diners (palanquejament). Els exemples més importants són els contractes a termini (*forwards*), els futurs, les opcions, les permutes financeres (*swaps*, que generalment serveixen per a canviar tipus fixos per variables), els CDS (swap de risc de crèdit, o, en anglès, *credit default swap*), etc.

Es poden distingir tres formes de reduir el risc, amb instruments financers específics: cobrir-se, assegurar-se o diversificar-se. Cobrir-se és reduir el risc de pèrdues elevades a canvi de reduir les possibilitats de guanys elevats. Assegurar-se vol dir canviar una pèrdua petita (prima) i segura a canvi de reduir les possibilitats d'una pèrdua futura elevada. Diversificar, fins allà on es pot, és reduir la variabilitat de la distribució de guanys i pèrdues tot mantenint la rendibilitat.

4 El valor d'una opció

La pregunta és llavors: quin ha de ser el valor de C ? Això s'ha de decidir a partir del valor $S(0)$ de l'actiu a temps zero, de K , de T i, és clar, utilitzant un model. Si utilitzem el model descrit a la secció 2, en principi podríem raonar de la forma següent.

Segons aquest model, si l'actiu a temps zero val $S(0)$, la llei de $\ln S(T)$ és normal amb esperança $\ln S(0) + T\mu_a$ i desviació típica $\sqrt{T}\sigma_a$. El valor de l'opció en l'instant T , el benefici que en pot treure el comprador, és $\max(S(T) - K, 0)$, i hem d'esperar que valgui $E(\max(S(T) - K, 0))$, quelcom que podríem calcular perquè coneixem la llei de $\ln S(t)$ utilitzant la fórmula (6). Aleshores, sembla natural pensar que el preu que hem de demanar per l'opció en l'instant 0 sigui aquella quantitat que col·locada a temps zero al banc, sense risc, doni a temps T el valor de l'opció a temps T , això és,

$$e^{-rT}E(\max(S(T) - K, 0)).$$

En general, aquesta operació —la de calcular a temps zero el valor de quelcom que a temps T té un cert valor— s'anomena *descomptar*.

Bé, doncs malgrat que això ens pugui semblar natural, aquesta no és la solució correcta, perquè en general dona oportunitat d'arbitratge, de fer negoci sense risc. Per veure això, considerem una situació molt més senzilla on aplicarem un argument diferent, el correcte, i veurem que no porta al mateix resultat.

Suposem que $S(0) = 100$ i que el valor a temps $T = 1$ és

$$\begin{cases} S(1) = 150 & \text{amb probabilitat } p, \\ S(1) = 70 & \text{amb probabilitat } 1 - p. \end{cases}$$

El valor de p forma part del model, de la mateixa forma que en el model continu es postula la llei de $\ln S(T)$. Però com ara veurem, és irrellevant,

tan sols intervindran els possibles valors de $S(1)$, però no pas p . Suposem que $K = 130$ i volem determinar el valor de la prima C . Podem pensar, com abans, que el comprador de l'opció és l'industrial que a temps $T = 1$ necessita 100 unitats d'una determinada divisa, que avui val 1 euro, i que d'aquí a un any haurà pujat a 1.5 o bé baixat a 0.70. L'industrial adquireix a un banc una opció per a comprar 100 unitats de la divisa a $T = 1$ amb cost $K = 130$, pagant una prima C , a determinar. Si ha pujat a 1.5, l'industrial exerceix l'opció i compra a 1.30 i, si ha baixat, no exerceix l'opció i compra a 0.70. Amb això, a canvi de pagar la prima, ha reduït la incertesa, el risc, perquè d'un rang d'oscil·lació de 70 a 150 sense l'opció ha passat a un rang de 70 a 130 amb l'opció.

Posem-nos en la posició del venedor, i volem dissenyar una estratègia per cobrir-nos del risc. Dissenyem una cartera amb y opcions venudes a preu C i x actius comprats a 100 cadascú, a temps zero. Després de signar el contracte, tindrem $Cy - 100x$ en *cash*, que posem al banc, i x actius. El valor d'aquesta cartera (opcions venudes i actius) a temps 1 depèn de si $S(1) = 150$ o $S(1) = 70$. En el primer cas, cada actiu val 150, però per cada opció hi perdem $150 - 130 = 20$ (la diferència entre el valor real de l'actiu a temps 1 i el preu K pel qual ens hem compromès a vendre'l), per tant tenim $150x - 20y$. En el segon cas, el comprador no exercirà les opcions, és com si no existissin i tenim un valor de $70x$. En resum, el valor de la cartera a temps $T = 1$ és

$$\begin{cases} 150x - 20y & \text{si } S(1) = 150, \\ 70x & \text{si } S(1) = 70, \end{cases}$$

mentre que tindrem $(Cy - 100x)(1 + r_a)$ al banc, on r_a designa el TAE anual. Si triem x, y de forma que aquests dos valors siguin iguals,

$$150x - 20y = 70x, \quad y = 4x$$

hem eliminat la incertesa. Observem que el valor de p no hi intervé pas. Aleshores, haurem fet un guany de

$$70x + (4xC - 100x)(1 + r_a) = x(1 + r_a) \left(\frac{70}{1 + r_a} - 100 + 4C \right),$$

on l'expressió E entre parèntesi ha de ser zero:

$$C = 25 - \frac{70}{4(1 + r_a)} = \frac{5(3 + 10r_a)}{2(1 + r_a)}.$$

Si C és diferent d'aquest valor, hi ha oportunitat d'arbitratge, perquè si $E > 0$, prenem x positiu, és a dir, comprem x accions i venem $4x$ opcions, i si $E < 0$, prenem x negatiu, és a dir, venem x accions i comprem $4x$ opcions.

Si raonéssim com abans, tindríem que el valor de l'opció a temps 1 és

$$\begin{cases} 20 & \text{si } S(1) = 150, \\ 0 & \text{si } S(1) = 70, \end{cases}$$

amb valor esperat $20p$ i trobaríem $C = \frac{20p}{1+r_a}$, que en general és diferent del valor anterior, el correcte.

Aquest exemple, tan senzill, conté, de fet, la clau de la solució en el cas general, tal com veurem a les seccions següents. La idea de muntar una cartera neutral al risc és *genialment senzilla*, com passa sovint en matemàtiques. Fixem-nos de moment que la solució per a C no depèn de la llei de $S(1)$, sinó que tan sols és conseqüència d'imposar la impossibilitat d'arbitratge. També ens ensenya que el venedor de l'opció no es pot quedar sense fer res després de cobrar la prima, sinó que ha de cobrir-se del risc dissenyant aquesta cartera. A la secció 8 tornarem a parlar d'aquesta idea de *cobertura*.

5 El teorema del no arbitratge. La probabilitat neutral al risc

A un probabilista, el fet que el càlcul de C en l'exemple anterior sigui independent de la llei de $S(1)$ no el pot deixar indiferent; ha de fer un esforç per a tornar-hi a introduir la probabilitat, per a defensar la professió. Això és possible fer-ho i ens portarà a un altre concepte interessant i clau, el de la *probabilitat neutral*.

Considerem un experiment amb M resultats possibles, $j = 1, 2, \dots, M$, i que es poden fer N apostes sobre el resultat; a l'aposta $i = 1, 2, \dots, N$, si surt j , hi ha un guany/pèrdua de $r_i(j)$.

Una *estratègia d'aposta* és un vector $X = (x_1, x_2, \dots, x_N)$, on x_i és la quantitat que es juga en la i -èsima aposta. Si surt j , el guany total és

$$R(j) = \sum_{i=1}^N x_i r_i(j).$$

En aquesta situació, tenim el resultat següent, la demostració del qual és una aplicació senzilla del teorema de dualitat en programació lineal.

TEOREMA. *O bé hi ha un vector de probabilitat $P = (p_1, p_2, \dots, p_M)$ (és a dir, $p_1 + p_2 + \dots + p_M = 1$) tal que*

$$\sum_{j=1}^M p_j r_i(j) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

o bé hi ha una estratègia d'aposta $X = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ tal que

$$\sum_{i=1}^N x_i r_i(j) > 0, \quad j = 1, 2, \dots, M.$$

És a dir, o bé hi ha unes probabilitats $p_j = P(X = j)$ de forma que totes les apostes són justes (amb esperança de guany zero) o bé hi ha una estratègia que dona un guany segur.

Apliquem això a l'exemple anterior. En els termes del teorema anterior, el resultat de l'experiment és el valor de $S(1)$. Hi ha dos resultats possibles,

$S(1) = 150$ o $S(1) = 70$ i dues apostes per fer: comprar un actiu (les 100 unitats de la divisa) o comprar una opció a temps zero. El teorema ens diu que no hi ha possibilitat d'arbitratge si hi ha p , $0 < p < 1$, de forma que el valor esperat de les dues apostes és zero (designant p la probabilitat que $S(1) = 150$).

El valor descomptat d'un actiu a temps 1 és

$$\begin{cases} \frac{150}{1+r_a} & \text{si } S(1) = 150, \\ \frac{70}{1+r_a} & \text{si } S(1) = 70. \end{cases}$$

L'esperança de guany comprant un actiu és

$$\frac{p150 + (1-p)70}{1+r_a} - 100 = p \frac{80}{1+r_a} - 100 + \frac{70}{1+r_a},$$

que val zero si $p = \frac{3+10r_a}{8}$.

El valor d'una opció a temps 1 és $\max(S(1) - 130, 0)$ i, per tant, descomptat és

$$\begin{cases} \frac{20}{1+r_a} & \text{si } S(1) = 150, \\ 0 & \text{si } S(1) = 70, \end{cases}$$

i l'esperança de guany d'aquesta estratègia és

$$\frac{p20}{1+r_a} - C = \frac{3+10r_a}{8} \frac{20}{1+r_a} - C,$$

d'on obtenim, si volem que l'esperança de guany sigui zero, que $C = \frac{5(3+10r_a)}{2(1+r_a)}$, com abans. És a dir, C ha de ser, tal com havíem intuït inicialment, el valor esperat de l'opció a temps 1, descomptat a temps zero, però *respecte de la probabilitat neutral al risc*.

Aquesta observació —la reaparició d'una probabilitat imposada pel no arbitratge— és fonamental i ens permetrà passar d'aquest exemple tan senzill al cas general.

6 Aproximació per un procés binomial multiperíode

El que volem fer ara és aproximar l'increment de $S(0)$ a $S(T)$ per molts saltets, N , com el considerat a la secció anterior, és a dir, que en cada etapa l'actiu només tingui dues possibilitats, o baixar o pujar. Prenent logaritmes, i com que el model postula que $\ln S(T) - \ln S(0)$ té llei normal d'esperança $T\mu_a$ i desviació típica $\sigma_a\sqrt{T}$, això correspon a aproximar una llei normal per sumes de variables independents idènticament distribuïdes que només prenen dos valors. Es tracta, per tant, d'un cas particular del teorema central del límit.

Sigui doncs X una variable normal de mitjana μ_a i variància σ_a^2 (després ja canviarem μ_a per $T\mu_a$ i σ_a^2 per $T\sigma_a^2$). La volem aproximar per

$$Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_N,$$

on les Y_i són independents, cada Y_i amb llei dicotòmica (tipus Bernoulli) $Y_i = +\varepsilon$ amb probabilitat q , $Y_i = -\varepsilon$ amb probabilitat $1 - q$. Podem pensar en un passeig aleatori, on en cada moment $i = 1, 2, \dots, N$, ens desplacem a la dreta ε centímetres amb probabilitat q o cap a l'esquerra $-\varepsilon$ centímetres amb probabilitat $1 - q$. Per veure quina és la tria correcta de ε , q igualarem les esperances i variàncies de X i $Y_1 + \cdots + Y_N$. Com que $E(Y_i) = \varepsilon(2q - 1)$ i $E(Y_i^2) = \varepsilon^2$, tenim $\text{Var}(Y_i) = \varepsilon^2(1 - (2q - 1)^2) = 4\varepsilon^2q(1 - q)$ i trobem

$$\mu_a = N\varepsilon(2q - 1), \quad \sigma_a^2 = N\varepsilon^2 4q(1 - q).$$

Llavors

$$\frac{2q - 1}{4q(1 - q)} = \frac{\mu_a \varepsilon}{\sigma_a^2},$$

per tant hem de prendre $\varepsilon = \lambda \sigma_a$, on λ no té unitats i cal triar q de forma que

$$\frac{2q - 1}{4q(1 - q)} = \lambda \frac{\mu_a}{\sigma_a}.$$

Si $\tau = \lambda \frac{\mu_a}{\sigma_a}$, la solució exacta és

$$q = \frac{2\tau - 1 + \sqrt{1 + 4\tau^2}}{4\tau}, \quad \text{amb } \sqrt{1 + 4\tau^2} - 1 = \frac{2}{N} \frac{\mu_a^2}{\sigma_a^2}.$$

Com que N és gran, τ és petit i podem fer, per simplificar, l'aproximació $\sqrt{1 + 4\tau^2} \approx 1 + 2\tau^2$, amb la qual cosa triem

$$q = \frac{1}{2}(1 + \tau), \quad \tau = \frac{1}{\sqrt{N}} \frac{\mu_a}{\sigma_a}, \quad \varepsilon = \frac{\sigma_a}{\sqrt{N}}.$$

El teorema central del límit afirma que quan $N \rightarrow \infty$,

$$\frac{(Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_N) - E(Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_N)}{\sqrt{\text{Var}(Y_1 + \cdots + Y_N)}} \rightarrow Z,$$

on Z denota la llei normal estàndard i la convergència és en distribució (de fet, es tracta de la versió del teorema central del límit per a esquemes triangulars, perquè la llei de cada Y_i també depèn de N). Amb la tria de q anterior hom té

$$E(Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_N) = \varepsilon N(2q - 1) = \mu_a,$$

$$\text{Var}(Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_N) = \sigma_a^2 \left(1 - \frac{1}{N} \frac{\mu_a^2}{\sigma_a^2} \right) \rightarrow \sigma_a^2,$$

amb la qual cosa quan $N \rightarrow \infty$,

$$Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_N \rightarrow N(\mu_a, \sigma_a^2).$$

Això s'anomena l'*aproximació de la llei normal per un passeig aleatori*.

Apliquem-ho al nostre cas; canviem μ_a per $T\mu_a$ i σ_a^2 per $T\sigma_a^2$ i posem $\Delta = \frac{T}{N}$. Tenim N variables $Y_1, Y_2, \dots, Y_N$ independents amb la mateixa llei

$$\begin{cases} Y_i = +\sigma_a\sqrt{\Delta} & \text{amb probabilitat } q = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\mu_a}{\sigma_a} \sqrt{\Delta} \right), \\ Y_i = -\sigma_a\sqrt{\Delta} & \text{amb probabilitat } 1 - q. \end{cases}$$

Aquest passeig aleatori en els log-preus es tradueix en el fet que cada Δ unitats de temps el preu de l'actiu puja per un factor u amb probabilitat q o baixa per un factor d amb probabilitat $1 - q$ amb $u = e^{\sigma_a\sqrt{\Delta}}$ i $d = e^{-\sigma_a\sqrt{\Delta}}$, és a dir,

$$S_{i+1} = \begin{cases} uS_i & \text{amb probabilitat } q, \\ \frac{1}{u}S_i & \text{amb probabilitat } 1 - q, \end{cases} \quad i = 0, \dots, N - 1.$$

Aquest procés discretitzat s'anomena *procés binomial en N etapes*, i hem vist que quan $N \rightarrow \infty$ té per límit el brownià geomètric.

7 La fórmula de Black-Scholes

El que hem après abans a la secció 5 és que la probabilitat q ha de ser substituïda a cada pas per la probabilitat neutral al risc p . Calculem-la.

L'estratègia de comprar un actiu a l'instant i i vendre'l a l'instant $i + 1$ tindria una esperança de guanys

$$\frac{puS_i + (1 - p)dS_i}{1 + r\Delta} - S_i,$$

que és zero quan

$$p = \frac{1 + r\Delta - d}{u - d} = \frac{1 + r\Delta - e^{-\sigma_a\sqrt{\Delta}}}{e^{\sigma_a\sqrt{\Delta}} - e^{-\sigma_a\sqrt{\Delta}}}.$$

La impossibilitat d'arbitratge ens ha fet reemplaçar q per p . Desfent el camí, considerem, per tant, novament les S_i i $Y_1, Y_2, \dots, Y_N$ amb q canviat per p . La variable $Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_N$, quan $N \rightarrow \infty$, tindrà per límit una llei normal de paràmetres

$$\begin{aligned} \lim_N (E(Y_1) + \cdots + E(Y_N)) &= \lim_N N\sigma_a\sqrt{\Delta}(2p - 1), \\ \lim_N N\sigma_a^2\Delta &= 4p(1 - p), \end{aligned}$$

límits que ara procedim a calcular. Posem $s = \sqrt{\Delta}$ i $\Delta = s^2$; utilitzant el desenvolupament de Taylor de l'exponencial trobem que

$$p = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{r - \frac{\sigma_a^2}{2}}{\sigma_a} s + O(s^2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{r - \frac{\sigma_a^2}{2}}{\sigma_a} \sqrt{\frac{T}{N}} + O\left(\frac{1}{N}\right).$$

Per tant, els límits anteriors valen

$$\lim_N N \sigma_a \sqrt{\frac{T}{N}} \left(\frac{r - \frac{\sigma_a^2}{2}}{\sigma_a} \sqrt{\frac{T}{N}} + O\left(\frac{1}{N}\right) \right) = \alpha T, \quad \alpha = \left(r - \frac{\sigma_a^2}{2} \right),$$

$$\lim_N 4N \sigma_a^2 \frac{T}{N} \left(\frac{1}{4} + O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right) \right) = T \sigma_a^2.$$

En conseqüència, sota la probabilitat neutral al risc, $S(t)$ és un brownià geomètric de paràmetres α, σ_a . Això vol dir que, conegut $S(0)$, podem escriure $S(T) = S(0)e^W$, amb W normal de mitjana αT i variància $\sigma_a^2 T$, i la conclusió és que el cost C de l'opció que no dona lloc a arbitratge és el valor descomptat del valor esperat a temps T ,

$$C = e^{-rT} E(\max(S(0)e^W - K, 0)),$$

amb $W = \alpha T + \sigma_a \sqrt{T} Z$, i Z normal estàndard.

Es pot donar una expressió explícita en termes de Φ , la funció de distribució de la normal estàndard,

$$\Phi(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^s e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-s}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx.$$

Utilitzant (6)

$$C = e^{-rT} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \max(S(0)e^{\alpha T + \sigma_a \sqrt{T}x} - K, 0) e^{-\frac{1}{2}x^2} dx.$$

La integral és en l'interval definit per $\alpha T + \sigma_a \sqrt{T}x > \ln \frac{K}{S(0)}$, és a dir, $x > \eta = \frac{\ln \frac{K}{S(0)} - \alpha T}{\sigma_a \sqrt{T}}$; per tant,

$$\begin{aligned} C &= e^{-rT} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\eta}^{\infty} (S(0)e^{\alpha T + \sigma_a \sqrt{T}x} - K) e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = \\ &= -e^{-rT} K \Phi(-\eta) + S(0)e^{-rT + \alpha T} \int_{\eta}^{\infty} e^{\sigma_a \sqrt{T}x - \frac{1}{2}x^2} dx. \end{aligned}$$

A la darrera integral completament quadrats a l'exponent i fem el canvi $y = x - \sigma_a \sqrt{T}$ per a obtenir finalment

$$\begin{aligned} C &= C(K, T, r, \sigma_a, S_0) = -e^{-rT} K \Phi(-\eta) + S(0)e^{-rT + \alpha T + \frac{1}{2}\sigma_a^2 T} \Phi(-\eta + \sigma_a \sqrt{T}) = \\ &= -e^{-rT} K \Phi(-\eta) + S(0)\Phi(-\eta + \sigma_a \sqrt{T}). \end{aligned}$$

Habitualment s'utilitza la notació

$$\omega = -\eta + \sigma_a \sqrt{T} = \frac{\log(\frac{S(0)}{K}) + rT + \sigma_a^2 \frac{T}{2}}{\sigma_a \sqrt{T}},$$

de manera que la fórmula de Black-Scholes s'escriu finalment

$$C(K, T, r, \sigma_a, S_0) = S(0)\Phi(\omega) - Ke^{-rT}\Phi(\omega - \sigma_a \sqrt{T}). \quad (9)$$

8 Equacions diferencials estocàstiques. L'equació de Black-Scholes

El que ens plantegem en aquesta secció és reformular els models de Samuelson i de Black-Scholes en termes d'equacions diferencials. El que farem serà mirar-nos el preu C de l'opció com a funció de T i S_0 (que conseqüentment ara denotarem per S), suposant que els altres tres paràmetres són constants. Veurem que compleix una equació en derivades parcials, l'equació de Black-Scholes, que resulta ser matemàticament equivalent a l'equació de difusió de la calor. Aquest model permet retrobar la fórmula per a C , però alhora permet comprendre, en temps continu, l'estratègia de cobertura.

Com que el model inclou una component estocàstica, no determinista, anirem a parar a una *equació diferencial estocàstica*. El marc matemàtic per a fer-ne un tractament rigorós és sofisticat, però aquí intentarem explicar-ne l'essencial sense tecnicismes. Parlar d'equacions diferencials és parlar de derivades, de taxes de canvi, de les variables. La derivada d'una funció determinista $f(t)$ és quelcom que ens permet entendre l'essencial dels petits increments,

$$f(t + dt) - f(t) \approx f'(t) dt.$$

Aquí, l'objecte variable és un procés estocàstic $X(t)$ que depèn del temps; el que varia amb t és una variable aleatòria. Però no parlarem de derivades, sinó que intentarem entendre directament l'estructura dels petits increments, el que podríem anomenar la *diferencial estocàstica*. El procés invers en el cas determinista, el pas de la derivada a la primitiva, es fa amb la teoria de la integració de Riemann. En el cas estocàstic aquest pas invers es fa amb una eina matemàtica anomenada la *integral estocàstica*, que aquí no necessitarem.

Comencem amb el procés de Wiener $W(t)$ de variància 1. Per a un increment Δt , $W(t + \Delta t) - W(t)$ és una variable normal d'esperança zero i variància Δt , que escriurem

$$\Delta W(t) = \sqrt{\Delta t} Z,$$

on Z és normal estàndard (estrictament, és una variable que depèn de t amb llei $N(0, 1)$). Això es compleix tant si Δt és petit com si és gran; el fet que la suma de variables normals independents també ho sigui (amb esperança la suma d'esperances i variància la suma de variàncies) implica, de fet, que si val per a Δt petits també val per a Δt grans. Fent $\Delta t \rightarrow 0$ escrivim

$$dW(t) = \sqrt{dt} Z.$$

Per tant, hom pot definir el procés de Wiener com aquell que té increments estacionaris independents i compleix l'equació anterior. Un brownià generalitzat $B(t)$ de tendència μ_a i variància σ_a^2 és el que compleix

$$dB(t) = \mu_a dt + \sigma_a \sqrt{dt} Z = \mu_a dt + \sigma_a dW(t).$$

Hem de pensar que $\mu_a dt$ és la part determinista i $\sigma_a \sqrt{dt} Z$ la part estocàstica, de mitjana zero. Fixem-nos que $\frac{dB}{dt}$ no existeix en cap sentit (és a dir, les variables aleatòries $\frac{\Delta B}{\Delta t}$ no tenen límit en el sentit de convergència en probabilitat ni en cap altre; de fet, una realització, una trajectòria $X_\omega(t)$ del procés, no és gairebé mai derivable). Ara bé, sí que és cert que un procés de Wiener té trajectòries contínues, quasi segurament. Fent un parèntesi, comentem que Einstein suposava, igual que Bachelier, que increments independents i estacionaris, amb $w_0 = 0$, automàticament donaven trajectòries contínues quasi segurament. Realment no és així, com va posar de manifest Paul Lévy. Amb les hipòtesis anteriors, gaussianitat implica trajectòries contínues; increments independents i trajectòries contínues també impliquen gaussianitat. Però existeixen processos amb increments independents i estacionaris, amb $w_0 = 0$, que no són gaussians i no tenen trajectòries contínues. En física la hipòtesi de continuïtat de les trajectòries és del tot necessària; pensem, per exemple, en el gra de pollen. En economia les coses canvien, ja que és perfectament assumible que els preus d'un mercat financer sofreixin salts. Actualment s'han recuperat per a les finances resultats de Lévy sobre processos amb increments independents i estacionaris, els anomenats *processos de Lévy*, que fa un temps eren simples curiositats matemàtiques.

Mirem ara com canvia un brownià geomètric com $S(t)$. Recordem que, conegut $S(t)$, $\ln S(t + \Delta t) - \ln S(t)$ té llei normal d'esperança $\mu_a \Delta t$ i variància $\sigma_a^2 \Delta t$, és a dir, $S(t + \Delta t) = S(t)e^{\mu_a \Delta t + \sigma_a \sqrt{\Delta t} Z}$; per tant,

$$S(t + \Delta t) - S(t) = S(t) \left(e^{\mu_a \Delta t + \sigma_a \sqrt{\Delta t} Z} - 1 \right).$$

Utilitzant el desenvolupament de Taylor de l'exponencial trobem que

$$\begin{aligned} \frac{S(t + \Delta t) - S(t)}{S(t)} &= \mu_a \Delta t + \sigma_a \sqrt{\Delta t} Z + \frac{1}{2} (\mu_a \Delta t + \sigma_a \sqrt{\Delta t} Z)^2 + \dots, \\ \frac{S(t + \Delta t) - S(t)}{S(t)} &= \mu_a \Delta t + \sigma_a \sqrt{\Delta t} Z + \frac{1}{2} \sigma_a^2 \Delta t Z^2 + \\ &+ \text{termes d'ordre superior a } \Delta t. \end{aligned} \quad (10)$$

Què és l'essencial d'aquest desenvolupament, quina és *la diferencial estocàstica*? Si analitzem el cas del brownià generalitzat, veiem que la part determinista té escala dt mentre que la part estocàstica té mitjana zero i escala $\sqrt{dt}$. Això és el que aquí prendrem com a definició de diferencial estocàstica: si $V(S, t)$ és qualsevol funció de S, t , la seva diferencial $dV(t)$ s'obté fent un petit increment Δt a t , obtenim un desenvolupament de $V(S(t + \Delta t), t) - V(S(t), t)$ on hi

haurà termes en Δt i en $\sqrt{\Delta t}$ tan deterministes com estocàstics (on interpretem que els termes estocàstics tenen tots esperança zero, dit d'una altra manera incorporem l'esperança als termes deterministes) i en el límit quan $\Delta t \rightarrow 0$, ens quedem solament amb els termes en Δt deterministes i els termes en $\sqrt{\Delta t}$ estocàstics.

Apliquem aquesta definició al desenvolupament (10). Pel que fa a tot el que segueix, hem de recordar que tractem amb lleis de variables *conegut* $S(t)$. Els dos primers termes clarament entren a la diferencial; sobre el tercer, observem que és un terme estocàstic amb esperança $\frac{1}{2}\sigma_a^2\Delta t$, perquè $E(Z^2) = E(Z)^2 + \text{Var}(Z) = 1$; per tant, escrivim

$$\frac{1}{2}\sigma_a^2\Delta t Z^2 = \frac{1}{2}\sigma_a^2\Delta t + \frac{1}{2}\sigma_a^2\Delta t(Z^2 - 1).$$

El darrer terme és estocàstic amb mitjana zero i d'ordre Δt i per tant, és d'ordre superior i l'hem de descartar (estrictament, hom pot veure que tendeix a zero en norma quadràtica). Dit d'una altra manera, podem pensar que $\frac{1}{2}\sigma_a^2\Delta t Z^2$ es fa més i més determinista igual a la seva esperança quan Δt es fa petit. Tot plegat dona

$$\frac{S(t + \Delta t) - S(t)}{\Delta t} = \left(\mu_a + \frac{1}{2}\sigma_a^2\right) + \sigma_a\sqrt{\Delta t}Z + \text{termes d'ordre superior},$$

que escrivim, fent $\Delta t \rightarrow 0$,

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \left(\mu_a + \frac{1}{2}\sigma_a^2\right) dt + \sigma_a\sqrt{dt}Z,$$

o també

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \left(\mu_a + \frac{1}{2}\sigma_a^2\right) dt + \sigma_a dW(t).$$

Aquesta és l'equació diferencial estocàstica que governa el brownià geomètric. Estrictament parlant diu que la llei de $dS(t)$, conegut $S(t)$, és $S(t)(\mu_a + \frac{1}{2}\sigma_a^2)dt + S(t)\sigma_a dW(t)$. Prenent esperances trobem

$$E(dS(t)|S(t)) = S(t) \left(\mu_a + \frac{1}{2}\sigma_a^2\right) dt,$$

on el terme esquerre és l'esperança de $dS(t)$ condicionada per $S(t)$. Tornant a prendre esperances, i utilitzant que $E(E(X|Y)) = E(X)$ tenim que

$$E(dS(t)) = E(S(t)) \left(\mu_a + \frac{1}{2}\sigma_a^2\right) dt,$$

que és l'equació determinista

$$\frac{d(E(S(t)))}{dt} = E(S(t)) \left(\mu_a + \frac{1}{2}\sigma_a^2\right),$$

de solució $E(S(t)) = S(0)e^{(\mu_a + \frac{1}{2}\sigma_a^2)t}$. El resultat és coherent amb el que hàviem vist a (7).

Un cop vista l'equació diferencial estocàstica satisfeta pels preus $S(t)$, podem analitzar com varia instantàniament el valor V de qualsevol producte financer la incertesa del qual només depèn de S (hom diu *contingent amb S*). Pensem, per tant, quina és la taxa de variació de V en un cert moment t quan l'actiu val $S(t)$. Hem de considerar l'increment ΔV en un interval de temps Δt petit, fer $\Delta t \rightarrow 0$ i quedar-nos solament amb els termes deterministes d'ordre Δt i els estocàstics d'ordre $\sqrt{\Delta t}$. Per la fórmula de Taylor

$$\Delta V = \frac{\partial V}{\partial S} \Delta S + \frac{\partial V}{\partial t} \Delta t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} (\Delta S)^2 + \frac{\partial^2 V}{\partial S \partial t} (\Delta S)(\Delta t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} (\Delta t)^2 + \dots$$

Tenim que $\Delta S = \mu_a S \Delta t + \sigma_a S Z \sqrt{\Delta t}$; per tant, conservant tan sols els termes en Δt o $\sqrt{\Delta t}$, resulta

$$\begin{aligned} \Delta V &= \frac{\partial V}{\partial S} (\mu_a S \Delta t + \sigma_a S Z \sqrt{\Delta t}) + \frac{\partial V}{\partial t} \Delta t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} (\mu_a S \Delta t + \sigma_a S Z \sqrt{\Delta t})^2 + \dots = \\ &= \frac{\partial V}{\partial S} (\mu_a S \Delta t + \sigma_a S Z \sqrt{\Delta t}) + \frac{\partial V}{\partial t} \Delta t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \sigma_a^2 S^2 Z^2 \Delta t + \dots \end{aligned}$$

Ara bé, com abans, la variable $\frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \sigma_a^2 S^2 Z^2 \Delta t$, conegut $S(t)$, la descomponem com a suma de la seva esperança, que és $\frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \sigma_a^2 S^2 \Delta t$, més un terme estocàstic d'ordre Δt , que desapareix quan fem $\Delta t \rightarrow 0$. Amb tot plegat trobem que la variació de V és

$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial S} \mu_a S + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \sigma_a^2 S^2 \right) dt + \frac{\partial V}{\partial S} \sigma_a S dW.$$

Aquesta derivació és un cas particular, simplificat, del que es coneix com a *fórmula d'Itô* en el càlcul diferencial estocàstic. L'observació que la variació dC té exactament la mateixa component dW d'incertesa que S serà important en el que segueix.

Tot seguit aplicarem aquest llenguatge del càlcul diferencial estocàstic per trobar novament el cost $C(S, T)$ d'una opció, suposant com abans que perseguim que no hi hagi oportunitat d'arbitratge. Farem exactament el mateix que abans hem fet a la secció 4, posant-nos en la situació del venedor d'opcions i cobrint-nos del risc. A l'instant $t_0 = 0$, formem una cartera consistent en b_0 opcions venudes i a_0 actius del subjacent. Aquesta cartera l'anirem redistribuint, comprant o venent les opcions i els actius instantàniament, de manera que a l'instant t tindrem $a(t)$ actius i $b(t)$ opcions, $a(0) = a_0$, $b(0) = b_0$. I triarem $a(t)$, $b(t)$ de forma que es compleixin dues coses: que no tingui risc mentre evoluciona i que sigui autofinançada. Això darrer vol dir que en cada instant els increments $da(t)$, $db(t)$ es compensen en el sentit que

$$C(S(t), t) db(t) + S(t) da(t) = 0.$$

Aquesta equació ens dona la proporció entre da i db en cada instant. Aquesta cartera té un valor a l'instant t donat per $\Pi(t) = b(t)C(S(t), t) + a(t)S(t)$. Com que és autofinançada, té variació

$$d\Pi = b\,dC + a\,dS + C\,db + S\,da = b\,dC + a\,dS,$$

i utilitzant les equacions per a dC , dS , i que tenen la mateixa part estocàstica veiem que

$$d\Pi = b \left(\frac{\partial C}{\partial S} \mu_a S + \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \sigma_a^2 S^2 \right) dt + b \frac{\partial C}{\partial S} \sigma_a S\,dW + a(\mu_a S\,dt + \sigma_a S\,dW),$$

$$d\Pi = \left(\left(b \frac{\partial C}{\partial S} + a \right) \mu_a S + b \frac{\partial C}{\partial t} + b \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \sigma_a^2 S^2 \right) dt + \left(b \frac{\partial C}{\partial S} + a \right) \sigma_a S\,dW.$$

Per tal que no tingui risc triem $a = -b \frac{\partial C}{\partial S}$ i aleshores aquesta cartera evolucionarà determinísticament segons

$$d\Pi = b \left(\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \sigma_a^2 S^2 \right) dt.$$

Ara bé, com que ara no hi ha incertesa, el rendiment de Π hauria de ser el del diner sense risc, a taxa d'interès r , és a dir, $d\Pi = r\Pi\,dt$, d'on s'obté l'equació en derivades parcials

$$b \left(\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \sigma_a^2 S^2 \right) dt = r b \left(C - S \frac{\partial C}{\partial S} \right) dt,$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} + r S \frac{\partial C}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma_a^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} = r C.$$

Aquesta és l'equació de Black-Scholes, satisfeta per $C = C(S, t)$, si volem que no hi hagi possibilitat d'arbitratge. El que es tracta ara és simplement de trobar la solució que compleix $C(S, T) = \max(S - K, 0)$. Fent uns canvis de funció i de variable convenients (que inclouen canviar la direcció temporal), aquest problema és equivalent al de la difusió de la calor, és a dir, el de resoldre l'equació

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t), u(x, 0) = f(x).$$

La solució d'aquesta equació és la convolució de la dada inicial f amb el nucli de difusió gaussià

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{-\frac{(x-y)^2}{2t}} dy.$$

Desfent tots els canvis de variable i de funció s'arriba a l'expressió trobada a (9).

9 Entre la teoria i la pràctica

A les seccions anteriors hem explicat un model per als actius financers i l'hem utilitzat per a obtenir l'equació de Black-Scholes.

Ara bé, els actius financers no es comporten exactament com els models que fem servir per a estudiar-los. Entre els models matemàtics i la realitat sempre hi ha desajustos, que no ens han d'impedir seguir utilitzant models perquè constitueixen una bona forma de comprendre el món real. Fischer Black, parlant de la seva fórmula, deia que el sorprenia que captés tant l'interès de la gent. Ho atribuïa a la simplicitat de les hipòtesis, tot i considerar-les poc realistes. Afegia que el model era bo com a primera aproximació i recomanava que abans de buscar una nova fórmula es treballés en nous mètodes d'estimar la volatilitat.

Els actius financers sobre els quals es contracten derivats presenten anomalies ben descrites a la literatura (vegeu [5]), que es resumeixen en tres punts: primer, la distribució de les rendibilitats presenta més valors extrems que els que prediu la distribució normal; després, a través de les estimacions s'observen volatilitats que no són constants sinó més aviat estocàstiques, i, finalment, s'observen dependències entre els quadrats (o els valors absoluts) de les rendibilitats, tot i ser aquestes essencialment no correlacionades (recordem que si unes certes variables aleatòries són independents, funcions qualssevol de les mateixes variables també ho són).

Observant rendibilitats diàries queda clar que la hipòtesi de normalitat no es compleix; tot i això, si utilitzem el model (3) per a rendibilitats mensuals, el teorema central del límit fa que el comportament s'ajusti prou bé al model normal. Podríem dir que a mitjà termini la hipòtesi de normalitat no és restrictiva, encara que en fallar la hipòtesi exacta s'obre la porta a un problema important. Sota normalitat la no correlació és equivalent a la independència però en general el resultat no és cert: teòricament és possible que les rendibilitats siguin no correlacionades però que hi hagi una certa dependència entre elles, com havíem explicat. Això porta al debat del que en termes econòmics s'anomena *l'eficiència dels mercats*.

9.1 Eficiència dels mercats

Seguint Fischer Black, direm que un mercat és eficient per a un actiu si no poden obtenir beneficis les persones que no tenen informació especial sobre la companyia, i si és difícil obtenir-ne fins i tot a persones que tenen informació especial, perquè el preu s'ajusta ràpidament al seu valor tan aviat com la informació esdevé disponible.

L'eficiència dels mercats és fonamental per a saber si es pot predir el comportament futur dels actius, que és una peça clau de la teoria. En àmbits econòmics es parla de la «hipòtesi del mercat eficient» en tres sentits: l'eficiència feble correspon a la impossibilitat d'obtenir beneficis a partir de tota la informació històrica dels preus o de les rendibilitats; l'eficiència semiforta afirma aquesta impossibilitat quan també s'incorpora tota la informació pú-

blica disponible; l'eficiència forta inclou també la impossibilitat per a tota la informació (pública o privada) coneguda per qualsevol participant del mercat. La hipòtesi d'eficiència ha estat defensada pels investigadors més prestigiosos, des d'Eugene Fama a Fischer Black.

Aquests conceptes es formulen matemàticament de la manera següent: l'eficiència feble correspon a la no existència d'autocorrelació entre les rendibilitats i l'eficiència forta, a la independència d'aquestes rendibilitats. L'eficiència semi-forta seria una situació intermèdia que s'anomena *diferència de martingala* i que no tractarem aquí.

Per aclarir una mica com s'analitza aquest concepte, introduïrem algunes idees dels processos estacionaris. Es diu que una sèrie temporal $\{y_t\}$ (una família de variables aleatòries indexades per temps discret) és estacionària si es compleixen les hipòtesis següents:

1. L'esperança és constant per a tot t , $E[y_t] = \mu$.
2. La variància també és constant per a tot t , $V[y_t] = y_0$.
3. Les autocovariàncies només depenen de la distància temporal entre les observacions, i no depenen del temps t , $\text{cov}[y_t, y_{t+k}] = y_k$ ($k = 0, 1, 2, \dots$).

Un passeig aleatori (8) no compleix cap de les hipòtesis de procés estacionari, en canvi sí que les compleix el procés format per les seves diferències, les rendibilitats $\{r_t\}$; vegeu (3). Aquest punt marca una diferència substancial entre els models que s'utilitzen en economia (processos estacionaris) i els que s'utilitzen en finances (passeigs aleatoris); s'acostuma a dir que en economia es poden fer previsions però no pas en finances.

El procés estacionari més representatiu és l'anomenat *procés autoregressiu d'ordre 1*, AR(1). Suposant, per simplificar, que la tendència és zero, un procés AR(1) s'escriu:

$$y_t = \rho y_{t-1} + \varepsilon_t, \quad (11)$$

on les innovacions ε_t es distribueixen com una normal amb mitjana zero i variància σ^2 , i $|\rho| < 1$. Escrivint cada observació en termes de l'anterior obtenim de forma recurrent

$$y_t = \varepsilon_t + \rho \varepsilon_{t-1} + \dots + \rho^n \varepsilon_{t-n} + \rho^{n+1} y_{t-n-1}.$$

És fàcil veure que les autocorrelacions són

$$\text{corr}(y_t, y_{t+k}) = \frac{\text{cov}[y_t, y_{t+k}]}{y_0} = \rho^k.$$

Calculem ara la variància marginal (no condicional)

$$V[y_t] = (1 + \rho^2 + \dots + \rho^{2n} + \dots) \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{1 - \rho^2}.$$

Si $\rho = 1$, que és el cas del passeig aleatori, la variància es fa infinita i només podem parlar de la variància condicional, fixat el valor present, s_0 .

Diguem de passada que el procés AR(1) és un procés de Markov, en el sentit que el passat no aporta cap informació sobre el futur que no estigui recollida en el present; ho podem veure en la fórmula (11), on y_t només depèn de y_{t-1} , tot i que les correlacions amb observacions anteriors no són pas zero. Això en general s'expressa en les *autocorrelacions parcials*. Les autocorrelacions i les autocorrelacions parcials (de les quals no seguirem parlant) poden estimar-se a partir de la mostra d'un procés i proporcionen els *correlogrames*, que són una radiografia del model subjacent i en molts casos permeten identificar-lo.

Ens centrarem ara a analitzar la sèrie de l'Ibex 35 considerada anteriorment per tal de veure fins a quin punt s'ajusta a un passeig aleatori. Volem contrastar empíricament si les rendibilitats són realment no correlacionades, com indica la hipòtesi feble de mercat eficient, i fins i tot si les rendibilitats són independents, com diu la hipòtesi forta. Per a contrastar si l'autocorrelació corresponent a un cert retard és zero ($\rho_k = 0$), podem utilitzar el resultat asimptòtic

$$\sqrt{n}(\hat{\rho}_k - \rho_k) \approx N(0, 1),$$

on $\hat{\rho}_k$ és l'autocorrelació estimada de la forma habitual.

En la figura 3 hi ha dibuixades les autocorrelacions empíriques fins a l'ordre 15 (segments verticals) de les rendibilitats de l'Ibex (primer gràfic) i de les rendibilitats de l'Ibex elevades al quadrat (segon gràfic). Les línies horitzontals de punts marquen els intervals de confiança del 99% a partir del resultat asimptòtic anterior.

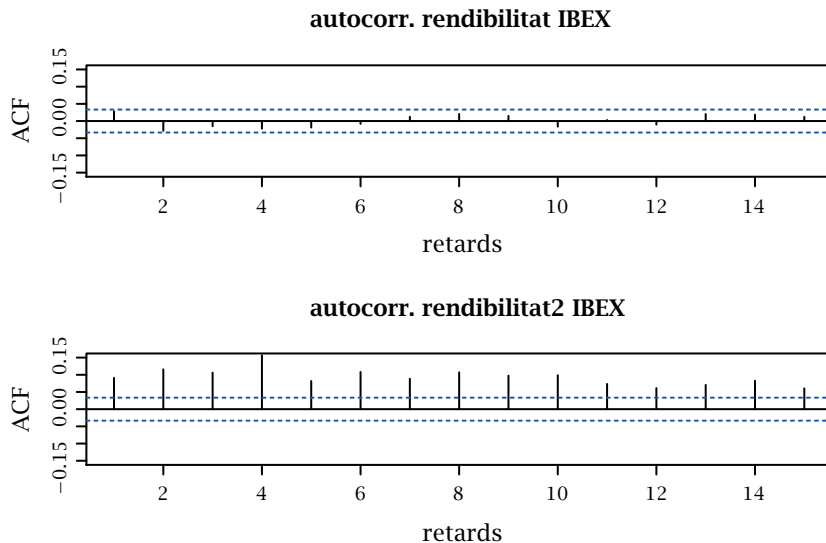


FIGURA 3: Autocorrelacions empíriques fins a l'ordre 15 (segments verticals) de les rendibilitats de l'Ibex (gràfic superior) i de les rendibilitats de l'Ibex al quadrat (gràfic inferior).

Les autocorrelacions de les rendibilitats de l'Ibex són totes dins de la banda formada pels intervals de confiança, fet que indica que podem acceptar que són no correlacionades tal com demana la hipòtesi feble de mercat eficient. Si es complís la hipòtesi forta d'independència, aleshores hauríem d'observar no correlació per a qualsevol funció de les rendibilitats, en particular per a les rendibilitats elevades al quadrat. El segon gràfic mostra clarament que això no és cert. A més veiem el comportament característic descrit a la literatura de rendibilitats no correlacionades, però rendibilitats al quadrat persistentment positives i no nul·les. Un intent d'explicar aquest comportament ha conduït al desenvolupament dels models ARCH, GARCH i els models de volatilitat estocàstica.

Els resultats obtinguts porten a la conclusió que en els mercats moderns l'eficiència, encara que sigui feble, si no és exactament certa, és molt pròxima a ser-ho. Si en un moment donat els preus no reflecteixen el valor exacte, i es produeix una situació d'arbitratge, ràpidament algú en treu profit i es torna a l'equilibri. Així les possibles ineficiències es tornen sense valor econòmic, si més no per al petit inversor. La hipòtesi d'eficiència porta a la conclusió del comportament aleatori dels mercats i, per tant, a la impossibilitat de la seva predicció. Això condueix a negar tota utilitat a l'anàlisi tècnica. Malkiel [11] fins i tot ridiculitza el fet dient que un mico amb un bastó obtindria els mateixos resultats que un qualificat professional de Wall Street. En qualsevol cas, sembla que molt pocs professionals (menys del 25 %) dels fons d'inversió poden batre al mercat (és a dir, obtenir millor rendibilitat que l'Ibex en el cas espanyol) i, a més, aquells que un any ho fan difícilment ho fan a l'any següent, de manera que el simple atzar explica els seus èxits.

9.2 Volatilitat implícita

En finances, com hem vist, el paradigma del moviment brownià no és completament cert, ni les rendibilitats es distribueixen exactament com una normal ni són realment independents, encara que no siguin correlacionades. A més, el comportament dels derivats amplifica molt el comportament dels subjacents sobre els quals se sustenten. Aquests fets es tradueixen en una valoració dels derivats feta a través de la fórmula de Black i Scholes que, tot i ser una bona primera aproximació, no és suficientment acurada; vegeu [3].

Si analitzem la fórmula de Black i Scholes (9) veiem que depèn de cinc paràmetres amb comportaments diversos. El temps d'exercici de l'opció T i el seu preu K venen fixats en el contracte; dels altres tres paràmetres el que menys afecta el preu de l'opció és el tipus d'interès r que es pot obtenir del mercat, per exemple, amb l'interès de les lletres al mateix venciment que l'opció; el que més afecta l'opció és el preu del subjacent S_0 , però aquest valor és conegut de forma contínua en cada moment. Així resulta que el paràmetre crític és la volatilitat σ , l'estimació de la qual demana un històric de preus. Es podria plantejar fer una estimació de la volatilitat i utilitzar la fórmula de Black-Scholes. A la pràctica, però, es fa al revés: els preus de les opcions no

s'obtenen pas aplicant la fórmula de Black-Scholes, és el mercat mateix qui posa el preu, seguint simplement la llei de l'oferta i la demanda. I llavors s'utilitza la fórmula de Black-Scholes per a fer justament una estimació de la volatilitat, identificant el valor de σ_a per al qual la fórmula de Black-Scholes donaria el valor observat de mercat. El resultat és el que s'anomena *volatilitat implícita*. Per exemple, amb els valors $S = 10700$, $T = 20/250$, $r = 0.01$ podem buscar per a $K = 10000$ quin valor de la volatilitat fa que la fórmula de Black-Scholes sigui 762 (en lloc de 740); el resultat obtingut numèricament és $\hat{\sigma} = 0.235$. Aquest resultat de la volatilitat fa que la fórmula doni exactament el preu observat al mercat; realment hi ha una relació bijectiva entre els preus de les opcions i les volatilitats. Els especialistes diuen que la volatilitat implícita és aquell valor incorrecte que, posat a una fórmula «incorrecta», dona el resultat correcte.

Per tal d'il·lustrar el que estem dient hem buscat al MEFF preus d'opcions de compra (*call*) sobre l'Ibex el dia 24 d'abril del 2017 amb venciment el 17 de maig. A la taula 1 hem considerat valors de K entre 10000 i 10800 a increments de 100 punts i hem utilitzat els mateixos paràmetres $S = 10700$, $T = 20/250$, $r = 0.01$. La segona línia indica el valor de mercat de C , la quarta la volatilitat implícita corresponent a aquests valors. Veiem que els valors oscil·len al voltant de 0.2; la tercera línia és llavors el valor de C calculat amb aquest valor de σ_a mitjançant la fórmula de Black-Scholes (també podríem triar σ_a de forma que la sèrie obtinguda mitjançant Black-Scholes s'ajusti millor a la sèrie de valors de mercat). Els ajustos són bastant bons, però s'observa que per a valors petits de K la fórmula de Black-Scholes subestima i per a valors grans sobreestima. Aquest comportament no és casual, sinó que s'observa de forma sistemàtica en tots els mercats, tal com comentarem a continuació.

K	10000	10100	10200	10300	10400	10500	10600	10700	10800
<i>Call</i>	762	673	587	505	427	355	288	228	177
BS	740	654	572	495	423	358	298	246	200
Vol. impl.	0.235	0.226	0.218	0.211	0.204	0.198	0.191	0.185	0.181

TAULA 1: Preus observats (*call*), els preus calculats amb la fórmula de Black-Scholes (BS) i les volatilitats implícites (vol. impl.).

La volatilitat implícita és diferent per a cada valor de K que considerem, mentre que el model de Black-Scholes utilitza la mateixa volatilitat per a tots els valors de K (i de T). Si dibuixem la volatilitat implícita en funció de K quan utilitzem la fórmula de Black-Scholes en els preus de les monedes, s'obté una corba amb un perfil quadràtic (*smile*) i, quan la utilitzem en els valors de les accions o índexs, com en el cas present de l'Ibex, s'obté una corba decreixent (*skew*).

El desajust de la fórmula en termes de les volatilitats implícites es pot estudiar també en funció del temps T i en funció simultàniament de K i T ,

la qual cosa dona lloc al que s'anomena *superfície de volatilitat*. La superfície de volatilitats interpola les dades de mercat dels derivats i, aleshores, permet deduir preus per a valors de T i K dels quals no es tinguin valors de mercat (per a més informació, vegeu Gatheral [7]).

En resum, la fórmula de Black-Scholes és important perquè determina el llenguatge de les finances; els valors de les seves derivades, que avaluen la sensibilitat, tenen nom propi (delta, gamma, vega, ρ ...). El gestor d'una cartera generalment vol estar *delta neutral* per a no veure's massa afectat pel canvi de preus dels subjacents, i cal comprar o vendre els subjacents corresponents (això significa que munta una cartera neutral tal com hem explicat a la secció 8, a partir de $\Delta = \frac{\partial C}{\partial S}$). Les carteres d'actius es gestionen a través de derivats perquè és la manera més ràpida i barata de fer-ho. Pensem, per exemple, en l'or, no es compra i ven or directament sinó futurs i altres derivats sobre aquest metall que són registres informàtics més senzills d'emmagatzemar. El mateix passa amb altres mercaderies com el petroli o el blat; també les accions són més cares de gestionar que les opcions sobre les mateixes accions. Els índexs com l'Ibex, l'Euro Stoxx 50 o el Dow Jones no es poden comprar, però sí que es venen derivats sobre aquests índexs que serveixen per a gestionar les carteres de valors.

9.3 Dia a dia de la gestió del risc en una entitat financera

La terminologia anglesa s'imposa, i avui en les entitats financeres tothom parla de *front office* (o *trading floor*) per referir-se al que abans se'n deia *tesoreria*, que és on els *traders* compren i venen actius, per satisfer les demandes dels clients i gestionar les seves carteres i les del propi banc. El *middle office* el forma la gent que vigilen els riscos en què poden incórrer els *traders* del *front office*, que naturalment estan regulats, i de totes les posicions de l'entitat en general, per a trametre la informació corresponent dins de la pròpia entitat, i també al supervisor, que avui és el Banc Central Europeu. És també aquí on treballen els analistes, com els matemàtics, que elaboren els models que els *traders* necessiten. El treball d'administració i gestió dels documents que s'han de preparar per a acreditar totes les operacions de compravenda, els contractes i les qüestions jurídiques que se'n deriven es fa des del *back office*.

L'actuació al llarg del dia està en mans dels *traders*, que parlen amb els clients i tanquen les operacions al mercat. El primer que necessiten quan comença el dia és saber els preus de mercat, per això el banc està subscrit a les plataformes que contenen aquesta informació a temps continu (Reuters o Bloomberg). A la vegada han de conèixer la corba de tipus d'interès, que es calcula a partir dels bons, i la superfície de volatilitat dels derivats, que també es calcula cada matí i es distribueix a tots els qui han d'operar amb derivats. Aquesta feina, així com l'ajust dels paràmetres dels models de valoració a partir dels preus de mercat, que es llegeixen a Bloomberg i Reuters, es prepara des del *middle office*. La funció del departament és també veure com afecta el moviment dels tipus d'interès en els beneficis i el capital de l'entitat. L'ajust

dels paràmetres es realitza amb hores de treball nocturn dels ordinadors a partir dels preus de tancament del dia. Així des de primera hora del matí es treballa amb els models ajustats a temps « $n - 1$ ».

Diàriament es descarreguen els preus de Bloomberg i s'insereixen en la base de dades pròpia. S'inclouen preus de tancament d'*equity* (accions i índexs borsaris), de tipus d'interès, *commodities* (matèries primeres) i corbes FX de canvis de moneda, de futurs de *commodities*, volatilitats implícites i dividendes d'alguns subjacents concrets. Es valoren les operacions de renda fixa, notes estructurades i derivats sobre *equity*, tipus d'interès, tipus de canvi, matèries primeres i inflació. Es calculen les superfícies de volatilitat, potser els paràmetres de Heston [8] d'alguns derivats de l'Ibex o l'Euro Stoxx. Es calibren els models de Hull & White per als derivats de tipus d'interès. Finalment, tots els càlculs fets s'insereixen en les bases de dades pròpies i alguns es carreguen també a les plataformes esmentades.

Referències

- [1] AVELLANEDA, M.; LAURENCE, P. *Quantitative Modeling of Derivative Securities. From Theory to Practice*. Boca Raton, FL: Chapman & Hall/CRC, 2000.
- [2] BACHELIER, L. «Théorie de la spéculation». *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (3), 17 (1900), 21-86.
- [3] BADESCU, A.; DEL CASTILLO, J.; ORTEGA, J.-P. «Hedging of time discrete auto-regressive stochastic volatility options». *Ann. Econ. Stat.*, 123-124 (2016), 271-306.
- [4] BLACK, F.; SCHOLES, M. «The pricing of options and corporate liabilities». *J. Polit. Econ.*, 81 (3) (1973), 637-654.
- [5] CONT, R. «Empirical properties of asset returns: stylized facts and statistical issues». *Quant. Finance*, 1 (2) (2001), 223-236.
- [6] COX, J. C.; ROSS, S. A.; RUBINSTEIN, M. «Option pricing: a simplified approach». *J. Financ. Econ.*, 7 (3) (1979), 229-263.
- [7] GATHERAL, J. *The Volatility Surface: A Practitioner's Guide*. Nova Jersey: Wiley-Interscience, 2006.
- [8] HESTON, S. «A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options». *Rev. Financ. Stud.*, 6 (2) (1993), 327-343.
- [9] HULL, J. C. *Options, Futures, and Other Derivatives*. 9a ed. EUA: Pearson, 2015.
- [10] JOLIS, M. «Probabilitat i Anàlisi, uns grans amics». *MatMat*, treball núm. 2 (2013), 26 p. <http://mat.uab.cat/matmat/PDF v2013/v2013n02.pdf>.
- [11] MALKIEL, B. G. *Un paseo aleatorio por Wall Street*. 10a ed. Madrid: Alianza Editorial, 2013.

- [12] MERTON, R. C. «Theory of rational option pricing». *Bell J. Econom. and Management Sci.*, 4 (1973), 141-183.
- [13] TAYLOR, S. J. *Asset Price Dynamics, Volatility and Prediction*. Princeton, NJ: Princeton University Press, 2005.
- [14] VALDIVIA, A. «Matemàtica financera en temps de crisi». *Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques*, 29 (2) (2014), 167-197.

DEPARTAMENT DE MATEMÀTIQUES
UNIVERSITAT AUTÒNOMA DE BARCELONA
{bruna,castillo}@mat.uab.cat

Definibilitat en estructures matemàtiques

ENRIQUE CASANOVAS RUIZ-FORNELLS

Resum: Discutim la noció de definibilitat de relacions, funcions i elements d'una estructura matemàtica mitjançant el llenguatge formal de la lògica de primer ordre en el context de la teoria de models. A través de l'exposició d'una sèrie d'exemples de problemes de definibilitat basats en sistemes numèrics familiars per a tot matemàtic, mostrem que l'anàlisi de la complexitat de les relacions definibles en una estructura aporta informació valuosa sobre qüestions de decidibilitat i categoricitat de la seva teoria.

Paraules clau: definibilitat, teoria de models, axiomes, decidibilitat, categoricitat.

Classificació MSC2010: 03C07, 03C40, 03C45.

1 Introducció

En el desenvolupament de qualsevol disciplina matemàtica és habitual alternar l'enunciat i la demostració de teoremes amb la introducció de definicions. Mitjançant una definició s'introdueix la notació que permet abreujar els enunciats posteriors i facilitar-ne la comprensió. No cal gaire discussió sobre els criteris que han de complir les definicions, més enllà que han d'evitar circularitats i que, en el cas de la definició d'operacions, han de demostrar-se prèviament unes condicions d'existència i unicitat dels valors. Una altra cosa diferent és explicar què significa que un objecte matemàtic concret, com un número natural o real o una relació entre números, sigui definible. Per a això en primer lloc cal aclarir el context, especificar en quin domini d'objectes o números estem treballant, quines altres nocions es pressuposen ja introduïdes i en quin llenguatge pot enunciar-se la definició. Però fins i tot després de tot això poden sorgir problemes.

A principis del segle xx, en el context de la crisi de fonaments de les matemàtiques, es van donar a conèixer diverses paradoxes relatives a la definibilitat. El 1906 B. Russell escriu l'article [16], en el qual exposa l'anomenada *paradoxa de Berry*. Pot formular-se com l'observació que el menor número natural que no és definible mitjançant menys de disset paraules de l'idioma català és, com s'aprecia comptant paraules de la frase anterior, definible mitjançant setze paraules. Russell, que atribueix aquesta paradoxa a un bibliotecari de la biblioteca Bodleian d'Oxford anomenat M. G. G. Berry, enuncia la paradoxa en termes de frases de menys de divuit síl·labes de l'idioma francès. Una altra paradoxa similar que Russell discuteix és la *paradoxa de Richard*, proposada originàriament per J. Richard a [14]. En aquest cas es consideren tots els números reals definibles, i se'n fa una llista $r_0, r_1, \dots$ ordenant-los d'acord amb la longitud de la seva definició i d'acord amb un ordre especificat per a les definicions que tinguin la mateixa longitud, per exemple, aplicant l'ordre lexicogràfic en aquest cas. Mitjançant el mètode de diagonalització es pot definir a continuació un número real r que difereix de r_n en el n -èsim dígit decimal, un número real definible que no apareix en la llista de tots els números reals definibles.

A la vista d'aquests exemples, és natural sospitar que la noció de número definible és poc rigorosa i ha de ser evitada en els raonaments matemàtics. El 1931 A. Tarski constata, a [23], que aquesta és l'opinió general dels matemàtics i es proposa argumentar en contra en un cas particular. En el citat article, Tarski mostra que els conjunts definibles de números reals en el grup ordenat additiu real són caracteritzables com a unions finites d'interval·ls (incloent-hi semirectes) i punts. El llenguatge que Tarski especifica perquè es puguin escriure les possibles definicions és un llenguatge formal, el llenguatge de la lògica de primer ordre. Molt pocs anys després, el mateix Tarski va mostrar que és possible definir la noció de veritat per a enunciats d'aquest llenguatge amb tota generalitat i precisió: es pot definir rigorosament una relació $\models$ tal que per a cada estructura matemàtica $\mathcal{M}$, per a cada fórmula de la lògica de primer ordre $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ i cada ènupla $a_1, \dots, a_n$ d'elements de l'univers o domini de $\mathcal{M}$, $\mathcal{M} \models \varphi(a_1, \dots, a_n)$ si i només si $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ és certa a $\mathcal{M}$ en fer correspondre les variables $x_1, \dots, x_n$ amb $a_1, \dots, a_n$. Com indicarem més endavant, a partir d'aquesta noció és fàcil caracteritzar les relacions, les operacions i els elements definibles en l'estructura $\mathcal{M}$. Les paradoxes de la definibilitat no sorgeixen quan el llenguatge en el qual es donen les possibles definicions és el llenguatge formal de la lògica de primer ordre.

El nostre propòsit en aquest article és il·lustrar alguns aspectes de la teoria de models aprofitant l'exposició de resultats sobre definibilitat en estructures matemàtiques. La *teoria de models* és la branca de la lògica matemàtica en la qual s'investiguen les estructures amb ajuda dels llenguatges formals de primer ordre. S'hi estudien les teories matemàtiques i els seus *models*, que són les estructures en les quals són certs els enunciats de les teories. La tesi que defensem és que l'anàlisi de les relacions definibles en una estructura aporta informació essencial per a entendre problemes de decidibilitat i categoricitat de teories i, més generalment, contribueix a posar un cert ordre en els dife-

rents tipus de teories i en la classificació dels seus models. Exemplificarem constantment les nostres afirmacions amb estructures matemàtiques que ens són molt familiars a tots i que provenen de l'aritmètica, de la teoria de grups i de la teoria de cossos.

2 Preliminars

Per a la discussió i l'exposició dels resultats necessitem introduir amb una certa precisió la noció d'estructura matemàtica i del llenguatge de primer ordre associat. No ho farem amb tot el rigor, entenent que el lector interessat coneix aquests temes o bé en tindrà prou amb una descripció succinta, suficient per a seguir l'argumentació. Per a més detalls es recomana acudir a un manual de lògica, com per exemple el de H. B. Enderton [3]. Les estructures matemàtiques són els objectes amb els quals habitualment els matemàtics treballen: conjunts en els quals estan establertes unes relacions i unes operacions. És important tenir ben present que no només el canvi de conjunt, sinó també el canvi, addició o supressió d'operacions o relacions, determina un canvi d'estructura. No és el mateix discutir els números naturals amb la suma, que amb la suma i el producte.

Si M és un conjunt i $n \geq 1$ és un número natural, amb M^n ens referim al producte cartesià de M iterat n vegades: $M \times \cdots \times M$. En altres termes, M^n és el conjunt de totes les ènuples $(a_1, \dots, a_n)$ que poden obtenir-se amb elements a_i de M .

Una *estructura* és un objecte matemàtic de la forma

$$\mathcal{M} = (M, R_1, R_2, \dots, f_1, f_2, \dots, c_1, c_2, \dots),$$

on

- M és un conjunt no buit, l'*univers* de l'estructura.
- $R_i \subseteq M^{n_i}$ és una relació a M .
- $f_i: M^{m_i} \rightarrow M$ és una operació a M .
- $c_i \in M$ és un element destacat de M , una constant de M .

Una estructura pot tenir poques o moltes relacions, operacions i elements destacats i hi poden faltar alguns d'aquests ingredients. Alguns exemples familiars contribuiran a millorar-ne la comprensió:

- Els cossos de números racionals $(\mathbb{Q}, +, -, \cdot, 0, 1)$, de números reals $(\mathbb{R}, +, -, \cdot, 0, 1)$ i de números complexos $(\mathbb{C}, +, -, \cdot, 0, 1)$.
- Grups, com el dels enters $(\mathbb{Z}, +, 0)$ o el de Prüfer $(\mathbb{Z}_{p^\infty}, +, 0)$, i grups ordenats com $(\mathbb{Z}, +, <, 0)$ o $(\mathbb{Q}, +, <, 0)$.
- Conjunts ordenats, com $(\mathbb{Q}, <)$ i $(\mathbb{Z}, <)$.
- Els números naturals amb diverses operacions i relacions, com $(\mathbb{N}, +, 0)$, $(\mathbb{N}, S)$ (on S és la funció successor) i $(\mathbb{N}, +, \cdot, <, 0, 1)$.

Implícitament hem acceptat que les relacions, les operacions i les constants d'una estructura es poden enumerar mitjançant números naturals. Això no és sempre així i ens fa perdre una mica de generalitat, però també ens permetrà eliminar alguns tecnicismes en l'enunciat de resultats. En tot cas, els exemples més naturals són d'aquest tipus o fins i tot més simples, i molt sovint tenen només un nombre finit de relacions, d'operacions i d'individus destacats.

En lògica matemàtica s'utilitzen llenguatges formals de primer ordre per a caracteritzar, en la mesura del possible, les estructures per les quals hom s'interessa i per a estudiar-ne els conjunts, les relacions i les operacions. Un *llenguatge de primer ordre* apropiat per a l'estructura $\mathcal{M}$ fa ús de símbols corresponents a les relacions, funcions i elements destacats de l'estructura així com de variables, quantificadors i connectors lògics. Sempre té, a més, un símbol per a la igualtat, amb el qual es poden construir equacions. A la pràctica, molt sovint no distingim amb notació diferent les relacions, les operacions i els elements destacats d'una estructura dels símbols del llenguatge formal que s'usen per a anomenar-los.

Els *termes* del llenguatge són les expressions que s'obtenen a partir de les constants i de les variables mitjançant l'aplicació dels símbols corresponents a les operacions. Per exemple, $(0 + x) \cdot (z + (y + x))$ és un terme del llenguatge de l'aritmètica. Les *fórmules* s'obtenen per mitjà dels connectors booleans $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ i mitjançant quantificadors elementals $\forall x$, $\exists x$ a partir de les *fórmules atòmiques*, que al seu torn es defineixen com a equacions entre termes $t_1 = t_2$ i predicacions bàsiques entre termes de la forma $R_i(t_1, \dots, t_{n_i})$. Els *enunciats* són fórmules en les quals totes les variables que apareixen han estat quantificades. Les variables que en una fórmula no s'han quantificat es diuen *variables lliures*. És habitual usar la notació $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ per a referir-se a una fórmula les variables lliures de la qual estiguin en la llista $x_1, \dots, x_n$. És important tenir ben present que els possibles valors de les variables són elements de l'univers de l'estructura, no subconjunts seus o objectes més complexos.

Els enunciats del llenguatge formal de $\mathcal{M}$ són sempre o certs o falsos en $\mathcal{M}$, la qual cosa no vol dir que tinguem un algorisme per a decidir en cada cas si ho són o no. El tenim en el cas de les estructures finites, però no en general. Per exemple, si $\text{Prim}(y)$ és la fórmula $1 < y \wedge \forall z_1 z_2 (y = z_1 \cdot z_2 \rightarrow (z_1 = 1 \vee z_1 = y))$, llavors l'enunciat $\forall x \exists y (x < y \wedge \text{Prim}(y))$ significa a $(\mathbb{N}, +, \cdot, <, 0, 1)$ que hi ha primers arbitràriament grans i, per tant, que hi ha infinits números primers, que sabem que és cert. No obstant això, l'enunciat $\forall x (1+1+1+1+1 < x \rightarrow \exists u \exists v \exists w (x = u+v+w \wedge \text{Prim}(u) \wedge \text{Prim}(v) \wedge \text{Prim}(w)))$ expressa en aquesta mateixa estructura que tot número major que cinc és suma de tres primers. Es tracta de la conjectura de Goldbach, que no sabem si és certa o no.

Escrivim $\mathcal{M} \models \sigma$ per indicar que l'enunciat σ és cert a $\mathcal{M}$. Un dels grans mèrits de Tarski consisteix a proporcionar una definició matemàticament inobjectable de la relació $\models$, la relació de *satisfacció*. És una definició recursiva que segueix les fases de construcció de l'enunciat. Com que els enunciats es construeixen mitjançant un procés recursiu a partir de fórmules atòmiques

amb connectors i quantificacions, i en les fases intermèdies del procés no es tenen enunciat, sinó fórmules amb variables lliures, cal definir la relació de satisfacció per a aquestes. Llavors, fa falta també considerar una llista d'elements de l'estructura que correspongui a les variables lliures de la fórmula. Recordem que la notació $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ indica que les variables lliures de la fórmula φ són en la llista $x_1, \dots, x_n$. Per exemple, en el llenguatge d'anells $\varphi(x, y)$ pot ser la fórmula $\exists z (x = y + z \cdot z)$, que diu que x és la suma de y amb un quadrat. Escrivim $\mathcal{M} \models \varphi(a_1, \dots, a_n)$ per indicar que la fórmula és certa a $\mathcal{M}$ en fer correspondre les variables $x_1, \dots, x_n$ amb els elements $a_1, \dots, a_n \in M$, és a dir, que la ènupla $(a_1, \dots, a_n)$ satisfà la fórmula a $\mathcal{M}$. Per exemple, la fórmula $\varphi(x, y)$ que acabem de donar la satisfan en el cos real tots els parells (a, b) de números reals tals que $a \geq b$; però en el cos complex la satisfan tots els parells de números complexos sense restriccions.

Una vegada es disposa de la noció de veritat en una estructura, es pot introduir la noció de *conseqüència lògica*. Es diu que un enunciat σ és conseqüència d'un conjunt d'enunciats Σ (o que Σ implica σ) si σ és certa en totes les estructures en les quals són certs tots els enunciats de Σ . En la lògica de primer ordre tenim un *teorema de completitud*, que garanteix que les conseqüències lògiques de Σ , en el sentit anterior, són precisament els enunciats que són demostrables a partir dels enunciats de Σ .

3 Teories

Les teories són conjunts d'enunciats. És convenient que els enunciats que siguin conseqüència lògica d'una teoria T , els seus *teoremes*, es considerin també elements de T . Per això, es defineix una *teoria* com un conjunt d'enunciats T que té la propietat que totes les seves conseqüències (en el llenguatge de T) pertanyen a T . Un cas particular és el de la *teoria d'una estructura* $\mathcal{M}$; és el conjunt $\text{Th}(\mathcal{M})$ format pels enunciats del seu llenguatge formal de primer ordre que són certs en aquesta estructura, és a dir:

$$\text{Th}(\mathcal{M}) = \{\sigma \mid \mathcal{M} \models \sigma\}.$$

Es diu que una estructura $\mathcal{M}$ és un *model* d'una teoria T si tots els enunciats de T són certs a $\mathcal{M}$, és a dir, si $T \subseteq \text{Th}(\mathcal{M})$.

Una de les portes d'entrada a la teoria de models es traspassa en observar que dues estructures poden tenir la mateixa teoria i no ser isomorfes. Per a explicar aquest fet i d'altres que vindran tot seguit necessitarem parlar de dues relacions entre estructures, la *isomorfia*, $\cong$, i l'*equivalència elemental*, $\equiv$. Ambdues s'estableixen entre estructures que tenen el mateix llenguatge. La noció d'isomorfia és la que s'usa habitualment en àlgebra.

- $\mathcal{M} \cong \mathcal{N}$ si i només si hi ha una bijecció f entre els universos M i N que transforma les relacions, operacions i constants de $\mathcal{M}$ en les corresponents de $\mathcal{N}$, és a dir, per a cada relació R_i de $\mathcal{M}$, $f(R_i) = \{(f(a_1), \dots, f(a_n)) \mid (a_1, \dots, a_n) \in R_i\}$ és la corresponent relació de $\mathcal{N}$, i de manera similar per a operacions i individus destacats.

- $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$ si i només si els enunciats del llenguatge formal de primer ordre que són certs a $\mathcal{M}$ i a $\mathcal{N}$ són els mateixos, és a dir, si i només si $\text{Th}(\mathcal{M}) = \text{Th}(\mathcal{N})$.

Observem que $\mathcal{M} \cong \mathcal{N}$ indica que $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$ són indistingibles per les seves propietats matemàtiques, mentre que $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$ diu simplement que no les podem distingir mitjançant les propietats que poden expressar-se en el llenguatge formal de la lògica de primer ordre. Aquestes nocions pertanyen als aspectes més elementals de la teoria de models. Com a text de referència per a aquestes qüestions i, en general, per a tot el que segueix, recomanem el llibre de K. Tent i M. Ziegler (vegeu [25]).

Les preguntes inicials que, des de la perspectiva de la teoria de models, hom es pot plantejar sobre una estructura $\mathcal{M}$ inclouen molt probablement les següents:

1. És possible especificar una llista d'axiomes per a la teoria de $\mathcal{M}$?
2. Existeix un algorisme per a decidir quins enunciats són certs a $\mathcal{M}$?
3. Quines són les estructures $\mathcal{N}$ tals que $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$?
4. Quines relacions, operacions i elements són definibles a $\mathcal{M}$?

Hem d'explicar què és una llista d'axiomes i hem d'acabar de precisar què significa ser definible. El nostre propòsit és mostrar com l'última pregunta està molt relacionada amb les anteriors. Avancem alguna informació sobre les respostes possibles:

- Les dues primeres preguntes, adequadament formulades, són equivalents i molt sovint no tenen resposta positiva.
- Excepte en casos trivials, la resposta a la tercera pregunta és que no són únicament les estructures isomorfes a $\mathcal{M}$.

Donar *axiomes* per a una teoria vol dir escollir alguns dels seus enunciats de manera que els altres s'obtinguin a partir d'aquests com a *teoremes*, com a enunciats demostrats. En un sentit trivial, sempre és possible trobar un conjunt d'axiomes per a una teoria: n'hi ha prou amb prendre com a axiomes tots els enunciats de la teoria. Això, clarament, no té interès. Volem un conjunt simple d'axiomes, si és possible finit. Aquesta exigència es pot traduir en el fet que, almenys, es pugui determinar amb precisió, mitjançant algun algorisme, quins enunciats són axiomes i quins no ho són. Aquesta discussió pressuposa que tenim un context efectiu, és a dir, un context en el qual té sentit aplicar algorismes, i, per tant, els enunciats del llenguatge de primer ordre es donen de manera sintàcticament verificable i les llistes d'axiomes poden ser generades de manera computable. Direm que una teoria T és *axiomatitzable* si és possible donar una llista efectiva (generada per un algorisme) d'axiomes per a T . La teoria T és *decidable* si existeix algun algorisme aplicable als enunciats del llenguatge formal per a resoldre si són o no teoremes de T . Finalment, la teoria T és *completa* si, per a cada enunciat σ del llenguatge formal de T , o bé σ és un teorema de T o bé ho és $\neg\sigma$.

La teoria $\text{Th}(\mathcal{M})$ d'una estructura $\mathcal{M}$ és sempre una teoria completa. Per a aquest tipus de teories, axiomatitzabilitat i decidibilitat són equivalents: es pot donar una llista efectiva d'axiomes si i només si hi ha un algorisme per a decidir quins enunciats són els seus teoremes. Això no passa, en general, amb teories incompletes. Per exemple, l'aritmètica de Peano de primer ordre, de la qual després parlarem detalladament, és axiomatitzable però indecidible. D'altra banda, encara que per a una teoria completa axiomatitzabilitat i decidibilitat són equivalents, no és obvi com es pot obtenir un bon conjunt d'axiomes a partir d'un algorisme de decisió per als teoremes, ni tampoc és obvi com es pot obtenir un bon algorisme de decisió per als teoremes a partir d'una llista efectiva d'axiomes.

Com és ben sabut, K. Gödel va demostrar el 1931 (vegeu [5]) que no és possible axiomatitzar l'aritmètica, és a dir, la teoria completa de $(\mathbb{N}, +, \cdot, <, 0, 1)$. L'aritmètica de Peano de primer ordre no és més que un fragment d'aquesta teoria. Contràriament a això, A. Tarski va mostrar el 1951 (vegeu [23] i [24]) que la teoria del cos dels números complexos sí que és decidible i també va demostrar la decidibilitat de la teoria del cos ordenat dels números reals. En el primer cas, la seva teoria és la dels cossos algebraicament tancats de característica zero, i en el segon, és la dels cossos ordenats reals tancats, és a dir, els cossos ordenats que satisfan el teorema del valor intermedi per a polinomis.

Pel que fa a la quarta pregunta, la descripció de les relacions definibles en casos concrets, el mètode més habitual està basat en l'*eliminació de quantificadors*. En general no és fàcil dir quines relacions són definibles en una estructura $\mathcal{M}$, però tenim moltes més opcions d'èxit caracteritzant les relacions definibles mitjançant fórmules sense quantificadors, ja que, al cap i a la fi, són simplement les combinacions booleanes de les relacions definibles mitjançant fórmules atòmiques. Que una teoria T tingui eliminació de quantificadors significa que per a cada $n \geq 1$ i cada fórmula $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ del llenguatge de T existeix una fórmula sense quantificadors $\psi(x_1, \dots, x_n)$ per a la qual T implica $\forall x_1 \dots x_n (\varphi(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow \psi(x_1, \dots, x_n))$. Si la teoria $\text{Th}(\mathcal{M})$ té eliminació de quantificadors podem aspirar a solucionar el problema de la caracterització de les relacions definibles. Tarski va demostrar que les teories del cos complex i del cos real ordenat que acabem d'esmentar tenen eliminació de quantificadors. Gràcies a això, sabem quins són els subconjunts de $\mathbb{C}$ definibles a $(\mathbb{C}, +, -, \cdot, 0, 1)$: són els subconjunts finits i els seus complementaris. I els subconjunts definibles de $\mathbb{C}^n$ (les relacions n -àries definibles) són els conjunts construïbles de la topologia de Zariski. Pel que fa als números reals, els subconjunts de $\mathbb{R}$ definibles a $(\mathbb{R}, +, -, \cdot, <, 0, 1)$ són les unions finites d'interval·ls (incloent-hi semirectes) i punts. I les relacions n -àries definibles són els subconjunts semialgebraics de $\mathbb{R}^n$. En canvi, en el cas de $(\mathbb{N}, +, \cdot, <, 0, 1)$ no tenim eliminació de quantificadors i les relacions definibles són d'una gran complexitat.

De vegades la teoria de l'estructura $\mathcal{M}$ que ens interessa no té eliminació de quantificadors, però podem ampliar el llenguatge de manera natural, afegint-hi

relacions, operacions o elements definibles sense paràmetres, de manera que finalment s'obtingui una estructura la teoria de la qual tingui eliminació de quantificadors. I això pot bastar per a obtenir una caracterització raonable de les relacions definibles a $\mathcal{M}$. Això és el que passa en el cas del cos real $(\mathbb{R}, +, -, \cdot, 0, 1)$, ja que afegint la relació d'ordre $<$ s'obté el cos ordenat real, la teoria del qual sí que té eliminació de quantificadors.

4 Axiomatització

Ara especificarem alguns conjunts d'axiomes per a algunes teories d'interès especial. En tots els casos, l'axiomatització s'estableix en el llenguatge formal de la lògica de primer ordre. Comencem amb l'*aritmètica de Peano*, el sistema formal habitual per a l'aritmètica. Té els axiomes següents:

1. $\forall x y (x + 1 = y + 1 \rightarrow x = y)$.
2. $\forall x x + 1 \neq 0$.
3. $\forall x x + 0 = x$.
4. $\forall x y x + (y + 1) = (x + y) + 1$.
5. $\forall x x \cdot 0 = 0$.
6. $\forall x y x \cdot (y + 1) = (x \cdot y) + x$.
7. $\forall x y (x < y \leftrightarrow \exists z (x + z = y \wedge z \neq 0))$.
8. Principi d'inducció: per a cada fórmula $\varphi(x_1, \dots, x_n, y)$

$$\forall x_1 \dots x_n (\varphi(x_1, \dots, x_n, 0) \wedge \forall y (\varphi(x_1, \dots, x_n, y) \rightarrow \varphi(x_1, \dots, x_n, y + 1)) \rightarrow \forall y \varphi(x_1, \dots, x_n, y)).$$

De vegades es prefereix usar la funció de successió $S(x) = x + 1$ en comptes del número 1 (definible per la seva banda com $1 = S(0)$) i es prefereix enunciar el sistema d'axiomes en el llenguatge $\{S, +, \cdot, 0, <\}$. Simplement cal canviar les expressions de la forma $t + 1$ per $S(t)$ en els axiomes. Els axiomes 1 i 2 especifiquen que S és una funció injectiva i que 0 no forma part del seu recorregut. Els axiomes 3 i 4 donen la definició recursiva de la suma, i els axiomes 5 i 6, la definició recursiva del producte. L'ordre $<$ s'introdueix a l'axioma 7 mitjançant una definició explícita. De fet, l'ordre és perfectament prescindible, i podríem presentar l'aritmètica sense tenir-lo en compte.

A l'axioma 8 es presenta el principi d'inducció en forma d'esquema axiomàtic. Hi ha tantes instàncies particulars de l'axioma com fórmules del llenguatge de primer ordre. No pot substituir-se per un únic axioma que quantifiqui sobre conjunts de números naturals ja que, com hem indicat, en el llenguatge de primer ordre només podem quantificar sobre elements de l'univers de l'estructura. Els matemàtics sovint estan acostumats a formular el principi d'inducció mitjançant un únic axioma que quantifica sobre conjunts de números naturals, però aquesta forma del principi d'inducció no pot expressar-se en la lògica de primer ordre; la seva formulació pertany a la teoria de conjunts o a la

lògica de segon ordre. D'altra banda, reflexionant-hi una mica, es veu que les aplicacions habituals del principi d'inducció en la demostració de teoremes aritmètics, encara que aparentment s'efectuïn per a subconjunts arbitraris de $\mathbb{N}$, en realitat es fan per a subconjunts definibles i són, per això, casos particulars del nostre esquema 8.

Com ja hem avançat abans, Gödel va demostrar que aquest sistema d'axiomes de l'aritmètica de Peano és insuficient per a l'aritmètica completa, no és una llista d'axiomes per a $\text{Th}(\mathbb{N}, +, \cdot, <, 0, 1)$. No obstant això, sí que serveix per a la gran majoria dels problemes aritmètics habituals, i no és fàcil trobar enunciats aritmètics certs que no poden ser obtinguts com a teoremes seus. Atès que no és una teoria completa, no es pot concloure la decidibilitat de l'aritmètica de Peano a partir de la seva axiomatitzabilitat. Ja s'ha comentat abans que a més és una teoria indecidible. És clar quins són els axiomes, però no hi ha cap algorisme que ens serveixi per a dir quins són els seus teoremes.

Fixem-nos en la teoria de cossos, i en particular en els cossos real i complex. És habitual en teoria de models tractar els cossos en el llenguatge d'anells $\{+, -, \cdot, 0, 1\}$ i la teoria de cossos ordenats en el llenguatge d'anells ordenats $\{+, -, \cdot, <, 0, 1\}$. No tenim, per tant, l'operació de divisió disponible de manera explícita, tot i que indirectament puguem parlar-ne. No s'hi podria afegir de manera immediata, ja que és una operació parcial. Podria afegir-s'hi definint la divisió per zero d'una manera arbitrària. Però no hi ha cap necessitat de fer-ho, simplement n'hi ha prou amb el llenguatge d'anells per a tots els propòsits, i tot és més simple en aquest llenguatge.

La teoria de cossos té una llista senzilla i bastant previsible d'axiomes. N'hi ha prou amb especificar que $0 \neq 1$, que $+$ i $\cdot$ són operacions associatives i commutatives, que $\cdot$ és distributiva respecte a $+$, que 0 és l'element neutre en la suma i que $-x$ és l'oposat de x respecte de la suma, que 1 és l'element neutre del producte i que tot element diferent de zero té un invers respecte del producte. Ens estalviem donar la llista d'aquests axiomes, que són coneguts de sobres.

La teoria de cossos algebraicament tancats s'obté afegint a la teoria de cossos els axiomes que garanteixen l'existència de zeros de tots els polinomis no constants. Això pot aconseguir-se amb els enunciats següents per a cada $n \geq 1$:

$$\forall y_0 \dots y_n \left(y_n \neq 0 \rightarrow \exists x \sum_{i=0}^n y_i x^i = 0 \right).$$

Observem que en aquesta última fórmula la potència x^i és una abreviació del producte de x amb si mateix i vegades, mentre que el subíndex de y_i és el que correspon a l'enumeració de les variables $y_0, \dots, y_n$.

La teoria dels cossos algebraicament tancats de característica un número primer p , ACF_p , s'obté afegint a més l'axioma que determina la característica:

$$\varphi_p := \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{p \text{ vegades}} = 0.$$

La teoria dels *cossos algebraicament tancats de característica zero*, ACF_0 , s'obté afegint a la teoria de cossos algebraicament tancats els axiomes $\neg\varphi_p$ per a cada primer p .

ACF_0 és la teoria del cos complex i ACF_p és la teoria del cos $\widetilde{\mathbb{F}_p}$, la clausura algebraica del cos de p elements $\mathbb{F}_p$. Són, per tant, teories completes axiomatitzables i per això teories decidibles.

La teoria de *cossos reals tancats* pot formular-se en el llenguatge d'anells o en el d'anells ordenats. La versió sense ordre és la teoria RCF , que s'axiomatitza afegint a la teoria de cossos els axiomes següents:

1. $\forall x_1 \dots x_n \ x_1^2 + \dots + x_n^2 \neq -1$ per a cada $n \geq 1$.
2. $\forall x \exists y \ (y^2 = x \vee y^2 = -x)$.
3. $\forall y_0 \dots y_{2n+1} \ (y_{2n+1} \neq 0 \rightarrow \exists x \sum_{i=0}^{2n+1} y_i x^i = 0)$ per a $n \geq 0$.

No és necessari especificar la característica, ja que els axiomes de l'apartat 1 ja impliquen que no pot ser un número primer. Els cossos en els quals valen aquests axiomes es diuen *formalment reals*. A l'apartat 2 es postula l'existència d'arrels quadrades i a l'apartat 3 es garanteix l'existència de zeros de polinomis de grau senar.

RCF és la teoria de $(\mathbb{R}, +, -, \cdot, 0, 1)$. Com en el cas del cos complex, va ser Tarski qui ho va demostrar. I com en el cas complex, la teoria és completa i axiomatitzable i per això decidable.

Considerem ara la teoria del cos real amb ordre, que té l'avantatge d'eliminar els quantificadors. La teoria $RCOF$ del cos ordenat real $(\mathbb{R}, +, -, \cdot, <, 0, 1)$ es pot axiomatitzar afegint simplement a RCF la definició explícita de l'ordre:

$$\forall x y \ (x < y \leftrightarrow x \neq y \wedge \exists z \ x + z^2 = y).$$

Alternativament podem axiomatitzar $RCOF$ partint de la teoria de *cossos ordenats*, que té els axiomes següents addicionals als de la teoria de cossos:

1. $\forall x \ x \not< x$.
2. $\forall x y z \ (x < y \wedge y < z \rightarrow x < z)$.
3. $\forall x y \ (x < y \vee x = y \vee y < x)$.
4. $\forall x y z \ (x < y \rightarrow x + z < y + z)$.
5. $\forall x y z \ (x < y \wedge 0 < z \rightarrow x \cdot z < y \cdot z)$.

S'afegeixen llavors axiomes que garanteixen que tot polinomi que passa de positiu a negatiu en un interval té un zero en l'interval. Això es pot aconseguir amb els axiomes següents per a cada $n \geq 0$:

$$\begin{aligned} \forall y_0 \dots y_n \ \forall x_1 x_2 \left(x_1 < x_2 \wedge \sum_{i=0}^n y_i x_1^i > 0 \wedge \sum_{i=0}^n y_i x_2^i < 0 \rightarrow \right. \\ \left. \rightarrow \exists x \left(x_1 < x \wedge x < x_2 \wedge \sum_{i=0}^n y_i x^i = 0 \right) \right). \end{aligned}$$

Les demostracions de la decidibilitat d'aquestes teories de cossos que es van donar originàriament es basaven en mètodes efectius d'eliminació de quantificadors.

5 Definibilitat

Ara comentarem amb més detall algunes qüestions de definibilitat. La manera més directa d'explicar què significa que una relació, una operació o un element d'una estructura sigui definible és apellant a les fórmules del llenguatge formal de primer ordre que es poden fer servir per a donar les definicions.

Una relació $R \subseteq M^n$ és *definible* a $\mathcal{M}$ sobre el conjunt $A \subseteq M$ (és *A-definible* a $\mathcal{M}$) si hi ha una fórmula $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ en el llenguatge ampliat amb noms per als elements de A tal que

$$R = \{(a_1, \dots, a_n) \in M^n \mid \mathcal{M} \models \varphi(a_1, \dots, a_n)\},$$

és a dir, R està formada per les ènuples de M que satisfan la fórmula a $\mathcal{M}$. En el cas d'una operació, es diu que és definible si ho és el seu graf i, finalment, diem que un element a és definible si ho és el seu conjunt unitari $\{a\}$. Es diu que els elements de A que apareixen en la fórmula són *paràmetres* de la definició.

De vegades no fem servir paràmetres en les definicions. Una relació, operació o individu és *definible sense paràmetres* a $\mathcal{M}$ si és *A-definible* per al cas $A = \emptyset$. Això significa simplement que en la fórmula $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ que usem per a definir no fem servir cap nom addicional. Hi ha una gran diferència entre definir amb paràmetres o sense. Per exemple, tot conjunt finit $\{a_1, \dots, a_n\}$ és definible amb paràmetres en qualsevol estructura que contingui els seus elements: n'hi ha prou amb considerar la disjunció ($x = a_1 \vee \dots \vee x = a_n$); però no és normal que els conjunts finits puguin definir-se sense paràmetres.

La definibilitat està molt relacionada amb la invariància. Una relació, una operació o un individu són *invariants* a $\mathcal{M}$ si els automorfismes de $\mathcal{M}$ els respecten. Les relacions, operacions i individus definibles sense paràmetres són invariants, però el recíproc no és cert en general. En comentarem algun exemple més endavant, i també donarem exemples en els quals la invariància i la definibilitat sense paràmetres coincideixen. En general, podem fer servir que una relació no és invariant per a demostrar que no és definible sense paràmetres.

És possible també caracteritzar les relacions definibles en una estructura sense necessitat d'utilitzar el llenguatge formal. Es pot evitar la lògica i, en lloc d'introduir la noció de definibilitat mitjançant fórmules i mitjançant la relació $\models$ de satisfacció (com acabem de fer), podem adoptar la presentació següent de la definibilitat:

Sigui $\mathcal{M} = (M, R_1, R_2, \dots, f_1, f_2, \dots, c_1, c_2, \dots)$ una estructura i sigui $A \subseteq M$. Es pot veure fàcilment que les relacions $R \subseteq M^n$ *A-definibles* a $\mathcal{M}$ són els elements de D_n , on ($D_n \mid n \in \mathbb{N}, n > 0$) és la menor col·lecció de subconjunts $D_n \subseteq \mathcal{P}(M^n)$ tal que:

1. $\{a\} \in D_1$ per a cada $a \in A$ i $\{c_1\}, \{c_2\}, \dots \in D_1$.
2. $R_i \in D_n$ si $R_i \subseteq M^n$.
3. $f_i \in D_{n+1}$ si $f_i: M^n \rightarrow M$.
4. $\{(a, a) \mid a \in M\} \in D_2$.

5. Cada D_n és tancat respecte de les operacions booleanes: si $R, S \in D_n$, aleshores

$$R \cap S, \quad R \cup S, \quad R \setminus S \in D_n.$$

6. Si $R \in D_{n+1}$, aleshores

$$\text{dom}(R) = \{(a_1, \dots, a_n) \mid (a_1, \dots, a_n, b) \in R \text{ per a algun } b \in M\} \in D_n.$$

7. Si $R \in D_n$, aleshores

$$R \times M = \{(a_1, \dots, a_n, b) \mid b \in M \text{ i } (a_1, \dots, a_n) \in R\} \in D_{n+1}.$$

8. Si $R \in D_n$ i π és una permutació de $\{1, \dots, n\}$, aleshores

$$R_\pi = \{(a_{\pi(1)}, \dots, a_{\pi(n)}) \mid (a_1, \dots, a_n) \in R\} \in D_n.$$

Observeu que 1-4 especifiquen només que unes determinades relacions són A -definibles, mentre que 5-8 donen procediments per a obtenir relacions A -definibles a partir d'altres relacions A -definibles. Les relacions A -definibles 1-4 són la igualtat, les relacions pròpies de $\mathcal{M}$, els grafs de les seves operacions i els conjunts unitaris, tant dels elements de A com dels elements destacats de $\mathcal{M}$. Els procediments de generació de noves relacions A -definibles són operacions booleanes, projeccions (o dominis), productes cartesianes i reordenacions d'ènples associades a permutacions d'índexs.

Considerem alguns exemples de definibilitat sense paràmetres en estructures familiars. És clar que 0 és definible a $(\mathbb{N}, S)$ mitjançant la fórmula $\forall y \neg S(y) = x$. I llavors cada número natural també és definible: n'hi ha prou amb aplicar S a 0 el nombre adequat de vegades. Però 0 no és definible sense paràmetres a $(\mathbb{Z}, S)$, ja que no és invariant: hi ha automorfismes d'aquesta estructura que transformen 0 en qualsevol altre enter. El mateix passa amb els altres enters, cap és definible sense paràmetres.

A $(\mathbb{N}, +)$ sí que es pot definir sense paràmetres el zero, i a més l'ordre i cada número natural: 0 es defineix mitjançant $x + x = x$, l'ordre $x < y$ es defineix amb $\exists z (x + z = y \wedge z \neq 0)$, el número 1 es defineix amb $0 < x \wedge \neg \exists y (0 < y \wedge y < x)$ i cada número natural $n \geq 2$ es defineix amb $x = 1 + \dots + 1$ (n vegades). Una conseqüència del fet que puguem definir sense paràmetres el zero, l'ordre i l'u és que no només la teoria de $(\mathbb{N}, +, \cdot, <, 0, 1)$ no és axiomatitzable, sinó que tampoc ho és la de $(\mathbb{N}, +, \cdot)$. En general, si les relacions, operacions i elements destacats d'una estructura $\mathcal{M}$ són definibles sense paràmetres en una altra estructura $\mathcal{N}$ que té el mateix univers, llavors l'axiomatitzabilitat de $\text{Th}(\mathcal{N})$ implica l'axiomatitzabilitat de $\text{Th}(\mathcal{M})$.

No tots els resultats sobre definibilitat es resolen de manera senzilla, exhibint una fórmula breu. Per exemple, Gödel va mostrar el 1931 a [5] que l'exponenciació (igual que totes les funcions recursives) és definible sense paràmetres a $(\mathbb{N}, +, \cdot)$, però la fórmula que la defineix ni és breu ni s'entén bé sense explicacions addicionals.

6 Aritmètica

L'aritmètica de la suma i el producte té una gran complexitat: no podem axiomatitzar-la ni donar un algorisme que decideixi quins són els enunciats aritmètics que són certs. No obstant això, si prescindim del producte i ens quedem únicament amb la suma, les coses canvien radicalment. M. Presburger va mostrar el 1930 (vegeu [12]) que la teoria de $(\mathbb{N}, +)$ és decidible. I a més va indicar com es pot ampliar el llenguatge formal mitjançant definicions de manera que hi hagi eliminació de quantificadors. La teoria es diu *aritmètica de Presburger* en el seu honor.

L'aritmètica de Presburger té eliminació de quantificadors si s'afegeixen al llenguatge $0, 1, <$ i les relacions (també definibles sense paràmetres) de congruència mòdul n per a cada natural $n \geq 2$. La relació de congruència $\equiv_n$ es defineix a $(\mathbb{N}, +)$ mitjançant la fórmula $\varphi(x, y)$ següent:

$$\exists z (x = y + \underbrace{z + \dots + z}_{n \text{ vegades}}) \vee \exists z (y = x + \underbrace{z + \dots + z}_{n \text{ vegades}}).$$

Un sistema d'axiomes per a l'aritmètica de Presburger s'obté restringint l'axiomàtica de l'aritmètica de Peano al llenguatge $\{+, 0, 1\}$, eliminant la definició recursiva del producte i, si es vol tenir eliminació de quantificadors, fent servir les definicions de l'ordre $<$ i de les congruències $\equiv_n$.

Un altre fragment tractable de l'aritmètica és l'aritmètica del producte. Th. Skolem va demostrar el 1930 (vegeu [22] i [2]) que la teoria de $(\mathbb{N}, \cdot)$ és decidible (i, per tant, axiomatitzable). En conseqüència, la suma no és definible sense paràmetres a $(\mathbb{N}, \cdot)$ i el producte no ho és a $(\mathbb{N}, +)$. Observeu que, no obstant això, el producte és invariant a $(\mathbb{N}, +)$. J. Robinson va demostrar el 1949 a [15] que la suma és definible sense paràmetres a $(\mathbb{N}, \cdot, S)$ i a $(\mathbb{N}, \cdot, <)$, i, per tant, les teories d'aquestes estructures no són axiomatitzables; també va demostrar que la suma i el producte són definibles a partir de l'operació S de successor i de la relació de divisibilitat. Per a definir la suma $x + y = z$ a $(\mathbb{N}, \cdot, S)$ es pot utilitzar la fórmula

$$S(x \cdot z) \cdot S(y \cdot z) = S((z \cdot z) \cdot S(x \cdot y)).$$

Com que S és definible a partir de l'ordre, això explica que també la suma pugui definir-se a $(\mathbb{N}, \cdot, <)$.

J. L. Lagrange va establir el 1770 que tot número natural és suma de quatre quadrats. Una conseqüència és que el conjunt $\mathbb{N}$ dels números naturals és definible sense paràmetres a $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ i, per tant, la seva teoria no és axiomatitzable. Més recentment, el 1949, Robinson va demostrar que $\mathbb{N}$ és definible sense paràmetres en el cos $(\mathbb{Q}, +, \cdot, -, 0, 1)$ i, per tant, la teoria d'aquest cos tampoc és axiomatitzable (vegeu [15]). En general, si l'univers d'una estructura $\mathcal{M}$ és definible sense paràmetres en una estructura $\mathcal{N}$ i les operacions, relacions i constants de $\mathcal{M}$ són també definibles sense paràmetres a $\mathcal{N}$ (per exemple, si són la restricció de les de $\mathcal{N}$ a l'univers M de $\mathcal{M}$), llavors l'axiomatitzabilitat de $\mathcal{N}$ implica l'axiomatitzabilitat de $\mathcal{M}$.

El número 1 no és definible sense paràmetres a $(\mathbb{Z}, +)$ (ja que no és invariant), però el número 0 sí que ho és; tampoc són definibles $<$ i $\mathbb{N}$ en no ser invariants. Si hi afegim el número 1, les coses canvien. L'ordre enter $<$ segueix sense ser definible sense paràmetres a $(\mathbb{Z}, +, 0, 1)$, però ja no podem fer servir l'argument que no és invariant. De fet, és invariant. La raó per la qual no es pot definir l'ordre en aquest cas és més profunda. Les teories de $(\mathbb{Z}, +, 0)$, $(\mathbb{Z}, +, 0, 1)$ i $(\mathbb{Z}, +, <, 0, 1)$ són axiomatitzables, són variacions de l'aritmètica de Presburger. Però en els dos primers casos les teories són *estables*, i una de les característiques de les teories estables és que no s'hi pot definir cap ordre no trivial. En tots tres casos és possible obtenir eliminació de quantificadors si s'hi afegeix l'aplicació $a \mapsto -a$ i les relacions de congruència $\equiv_n$, totes definibles sense paràmetres.

Resumint la situació que hem trobat en l'aritmètica:

- Són axiomatitzables (i decidibles) les teories de $(\mathbb{N}, +)$, de $(\mathbb{N}, \cdot)$, de $(\mathbb{Z}, +)$, de $(\mathbb{Z}, +, 1)$ i de $(\mathbb{Z}, +, <, 1)$.
- No són axiomatitzables (ni decidibles) les teories de $(\mathbb{N}, +, \cdot)$, de $(\mathbb{N}, \cdot, S)$, de $(\mathbb{N}, \cdot, <)$, de $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ni de $(\mathbb{Q}, +, \cdot, -, 0, 1)$.

7 Cossos

Ja hem comentat que quan una teoria té eliminació de quantificadors sol ser relativament senzill descriure les seves relacions definibles, ja que habitualment les fórmules sense quantificació són manejables i comprensibles. En el context de la teoria de cossos hi ha nombrosos resultats d'eliminació de quantificadors. En els casos més notables l'eliminació té lloc directament en el llenguatge d'anells o en el llenguatge d'anells ordenats.

Tarski va demostrar el 1951 a [24] que la teoria del cos complex $(\mathbb{C}, +, \cdot, -, 0, 1)$ (la teoria ACF_0 dels cossos algebraicament tancats de característica zero) té eliminació de quantificadors. A. Macintyre va demostrar el 1971 a [7] que si la teoria d'un cos té eliminació de quantificadors en el llenguatge d'anells, el cos és algebraicament tancat. Tarski va demostrar també el 1951 que la teoria de $(\mathbb{R}, +, \cdot, -, <, 0, 1)$ (la teoria $RCOF$ dels cossos ordenats reals tancats) té eliminació de quantificadors. L'ordre $<$ és necessari per a això. A. Macintyre, K. McKenna i L. van den Dries van demostrar el 1983 (vegeu [8]) que aquest és fonamentalment l'únic cas: si la teoria d'un cos ordenat té eliminació de quantificadors en el llenguatge d'anells ordenats, el cos és real tancat.

Ni $\mathbb{N}$ ni $\mathbb{Z}$ ni $\mathbb{Q}$ són definibles sense paràmetres a $(\mathbb{R}, +, \cdot, -, 0, 1)$. Si ho fossin, la complexitat lògica de l'aritmètica l'heretarien els números reals i la seva teoria no seria axiomatitzable. Pel mateix motiu, tampoc són definibles sense paràmetres a $(\mathbb{C}, +, \cdot, -, 0, 1)$. Però, per un altre motiu, sabem fins i tot que aquests conjunts tampoc es poden definir en aquests cossos amb l'ajuda de paràmetres. La raó és que, gràcies a l'eliminació de quantificadors, coneixem molt bé els conjunts que es poden definir amb paràmetres en aquest tipus d'estructures: són únicament els conjunts finits i els cofinits en el cos complex

i són les unions finites d'interval·ls i de punts en el cos real. Però d'això en parlarem més endavant.

Curiosament, $\mathbb{Z}$ sí que és definible sense paràmetres en el cos exponencial complex $(\mathbb{C}, +, \cdot, -, e^x, 0, 1)$ i, per tant, la seva teoria no és axiomatitzable. Es pot definir $\mathbb{Z}$ amb la fórmula $\varphi(x)$ següent:

$$\forall yz (z \cdot z = -1 \wedge e^{y \cdot z} = 1 \rightarrow e^{x \cdot y \cdot z} = 1).$$

8 Categoricitat

Ens centrarem ara en la tercera de les preguntes que hem formulat al principi, la relativa a l'isomorfisme i l'equivalència elemental. La qüestió més immediata és si les teories completes de primer ordre determinen, excepte isomorfisme, els seus models i les estructures que les satisfan. També aquí la definibilitat hi té alguna cosa a veure.

Necessitem parlar una mica de cardinalitats infinites per a poder parlar de categoricitat, però ens limitarem als requisits mínims. Dos conjunts A, B tenen la mateixa grandària o cardinalitat ($|A| = |B|$) quan existeix una bijecció entre ells. L'ordre $|A| \leq |B|$ entre cardinalitats es defineix per l'existència d'una funció injectiva de A a B . Els números cardinals $0, 1, 2, \dots, \aleph_0, \aleph_1, \dots$ comencen amb els números naturals i continuen amb les cardinalitats dels conjunts infinits. El menor número cardinal infinit és $\omega = \aleph_0 = |\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}|$. A cada cardinal el segueix immediatament un altre en l'ordre. El successor de $\aleph_0$ és $\omega_1 = \aleph_1$, el primer cardinal no numerable. El cardinal del continu és $|\mathbb{R}| = |\mathbb{C}| = 2^{\aleph_0} \geq \aleph_1$. Un text bàsic i clar sobre aquests temes és [4].

No passa mai que tots els models d'una teoria completa siguin isomorfs entre si, tret que estiguem en el cas trivial (a aquest efecte) de la teoria d'una estructura finita. En altres paraules, només les teories de les estructures finites són categòriques. Això és degut al teorema de Löwenheim-Skolem: si $\mathcal{M}$ és una estructura infinita, llavors per a cada cardinal infinit κ hi ha una estructura $\mathcal{N}$ de cardinalitat κ tal que $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$. Versions parcials d'aquest teorema es deuen a L. Löwenheim (1915) i T. Skolem (1928), però la versió completa és posterior i té aportacions d'A. Tarski. Com que la teoria de $\mathcal{M}$ té models de cardinalitats infinites diverses, té models no isomorfs per raons molt poderoses. Podem considerar casos concrets. Per exemple, se sap que $(\mathbb{R}, +, <, 0) \equiv (\mathbb{Q}, +, <, 0)$ però (per raons de cardinalitat) $(\mathbb{R}, +, <, 0) \not\equiv (\mathbb{Q}, +, <, 0)$. De manera similar, si $\tilde{\mathbb{Q}}$ és la clausura algebraica de $\mathbb{Q}$, $(\mathbb{C}, +, \cdot, -, 0, 1) \equiv (\tilde{\mathbb{Q}}, +, \cdot, -, 0, 1)$ i, altra vegada per raons de cardinalitat, $(\mathbb{C}, +, \cdot, -, 0, 1) \not\equiv (\tilde{\mathbb{Q}}, +, \cdot, -, 0, 1)$.

Un succedani força satisfactori de la categoricitat és la categoricitat en cardinal. Diem que una teoria és κ -categòrica si té algun model de cardinalitat κ i tots els seus models de cardinalitat κ són isomorfs. M. Morley va demostrar el 1965 a [10] que una teoria T és categòrica en un cardinal $\geq \aleph_1$ si i només si és categòrica en tots els cardinals $\geq \aleph_1$. Per tant, les opcions es redueixen a $\aleph_0$ -categòrica i $\aleph_1$ -categòrica (categòrica en tots els cardinals $\geq \aleph_1$). Un exemple de teoria $\aleph_0$ -categòrica i $\aleph_1$ -categòrica el constitueixen els espais

vectorials infinits sobre $\mathbb{F}_p$. Els espais vectorials es tracten de dues maneres alternatives en la teoria de models. La primera opció seria considerar que l'univers és la unió dels vectors amb els elements del cos, afegint-hi un predicat per separar-los. Segons la segona opció, que és la més habitual i és la que aquí considerem, l'univers estaria format exclusivament pels vectors. Els elements del cos intervenen indirectament, mitjançant les operacions de producte per un escalar. Les operacions són la suma de vectors i els productes $v \mapsto \lambda \cdot v$ associats als elements λ del cos.

Existeixen teories no $\aleph_0$ -categòriques però sí $\aleph_1$ -categòriques, per exemple, la teoria dels cossos algebraicament tancats de característica zero o la dels espais vectorials sobre $\mathbb{Q}$. També hi ha teories $\aleph_0$ -categòriques que no són $\aleph_1$ -categòriques. L'ordre dens sense extrems, que és tant la teoria de $(\mathbb{Q}, <)$ com la de $(\mathbb{R}, <)$, i la teoria de les àlgebres de Boole sense àtoms en són dos exemples. Finalment, hi ha també teories que no són categòriques en cap cardinal, com la teoria RCF dels cossos reals tancats.

Se saben força coses de les teories $\aleph_0$ -categòriques. Hi ha un resultat cèlebre que C. Ryll-Nardzewski va demostrar el 1959 a [17] i que les caracteritza en termes del nombre de relacions definibles que tenen:

Les condicions següents són equivalents per a una teoria $T = \text{Th}(\mathcal{M})$:

1. T és $\aleph_0$ -categòrica.
2. Per a cada $n \geq 1$, només hi ha un nombre finit de relacions $R \subseteq M^n$ que siguin definibles sense paràmetres a $\mathcal{M}$.
3. Per a cada $A \subseteq M$ finit, només hi ha un nombre finit de subconjunts $X \subseteq M$ que siguin A -definibles a $\mathcal{M}$.

Es pot demostrar a partir d'això que si $\mathcal{M}$ és una estructura numerable i la seva teoria és $\aleph_0$ -categòrica, llavors tota relació invariant de $\mathcal{M}$ és definible a $\mathcal{M}$ sense paràmetres.

Veurem en la secció següent que també l'anàlisi de les relacions definibles té a veure amb la $\aleph_1$ -categoricitat.

9 Minimalitat i o-minimalitat

Es diu que l'estructura $\mathcal{M}$ és *minimal* si tots els subconjunts del seu univers M que són definibles amb paràmetres són o bé finits o bé cofinits. Observeu que això significa que només es poden definir els conjunts que en qualsevol cas són definibles sempre (amb ajuda del símbol d'igualtat). D'altra banda, les estructures minimals poden tenir relacions enàries definibles de gran complexitat per a $n \geq 2$; només s'imposa una limitació en el cas $n = 1$. Una estructura $\mathcal{M}$ és *fortament minimal* quan és minimal i també ho és tota estructura $\mathcal{N} \equiv \mathcal{M}$. Per exemple, $(\mathbb{N}, <)$ és minimal, però no és fortament minimal. Una teoria és fortament minimal si els seus models ho són, és a dir, si en els seus models els únics conjunts definibles amb paràmetres són els finits i els cofinits. W. Marsh va demostrar el 1966 que les teories fortament minimals són $\aleph_1$ -categòriques. Aquest resultat va ser incorporat a l'article [1] de J. T. Baldwin i A. H. Lachlan.

Entre les teories que hem considerat hi ha exemples que són fortament minimal. L'exemple més elemental és el de la teoria d'un conjunt infinit. En aquest cas l'estructura es redueix al seu univers, no hi ha més relacions que la igualtat i no hi ha operacions ni elements destacats. També la teoria de qualsevol espai vectorial és fortament minimal. I ho són també les teories ACF_0 i ACF_p de cossos algebraicament tancats, les teories del successor en els números naturals i en els enters, $\text{Th}(\mathbb{N}, S)$ i $\text{Th}(\mathbb{Z}, S)$, i la teoria dels grups abelians sense torsió $\text{Th}(\mathbb{Q}, +) = \text{Th}(\mathbb{R}, +)$.

La minimalitat té altres conseqüències estructurals. J. Reineke va demostrar el 1975 a [13] que tot grup minimal és abelià. A. Macintyre va demostrar el 1971 a [7] que tot cos amb teoria $\aleph_1$ -categòrica és algebraicament tancat i per això fortament minimal. Hi ha una conjectura oberta sobre aquest tema, la conjectura de Podewski, segons la qual tot cos minimal és algebraicament tancat. F. O. Wagner va demostrar el 2000 a [28] que la conjectura de Podewski és certa quan la característica és un número primer.

Les estructures ordenades no són mai fortament minimal. Però hi ha una noció anàloga a la minimalitat que s'adapta de manera natural a les estructures totalment ordenades: la *o-minimalitat*. Va ser introduïda per A. Pillay i C. Steinhorn el 1986 a [11] inspirant-se en uns treballs previs de Lou van den Dries, i avui en dia constitueix una àrea autònoma de la teoria de models, estretament associada a la geometria algebraica real. Un text de referència és [27].

Una estructura totalment ordenada és *o-minimal* si els únics conjunts definibles amb paràmetres són unions finites d'interval·ls (incloent-hi semirectes) i punts. Això significa que els conjunts definibles són els que serien en qualsevol cas definibles si tinguéssim eliminació de quantificadors en el llenguatge de l'ordre. A diferència del que passa en el cas minimal, si una estructura és o-minimal, totes les estructures que li són equivalents també ho són i es diu que la seva teoria completa és o-minimal. Per tant, no té sentit distingir entre o-minimal i fortament o-minimal. Són estructures o-minimals l'ordre dels racionals $(\mathbb{Q}, <)$ i el cos ordenat dels números reals $(\mathbb{R}, +, -, \cdot, <, 0, 1)$. No obstant, l'aritmètica dels enters $(\mathbb{Z}, +, -, \cdot, <, 0, 1)$ no és o-minimal. A. Pillay i C. Steinhorn van demostrar el 1986 que si un anell ordenat és o-minimal, llavors és elementalment equivalent al cos ordenat real.

Tarski va plantejar el 1967 si la teoria del cos exponencial real $(\mathbb{R}, +, -, \cdot, e^x, <, 0, 1)$ és axiomatitzable. El 1996 A. J. Wilkie va demostrar que $(\mathbb{R}, +, -, \cdot, e^x, <, 0, 1)$ és o-minimal (vegeu [30]). La conjectura de Schanuel per als reals diu que si $r_1, \dots, r_n \in \mathbb{R}$ són linealment independents sobre $\mathbb{Q}$, el grau de transcendència de $\mathbb{Q}(r_1, \dots, r_n, e^{r_1}, \dots, e^{r_n})$ sobre $\mathbb{Q}$ és major o igual que n . A. Macintyre i A. J. Wilkie van demostrar el 1996 a [9] que si la conjectura de Schanuel és certa, la teoria de $(\mathbb{R}, +, -, \cdot, e^x, <, 0, 1)$ és axiomatitzable. Però aquesta conjectura està lluny de ser resolta. L. van den Dries va mostrar el 1984 a [26] que la teoria de $(\mathbb{R}, +, -, \cdot, e^x, <, 0, 1)$ no té eliminació de quantificadors i A. J. Wilkie va demostrar a [30] que és *model-completa*, és a dir, que tota fórmula és equivalent a una fórmula de la forma $\exists y_1, \dots, y_m \varphi(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$, on a φ no hi ha quantificadors. La model-completitud és una condició sobre

la complexitat de les relacions definibles no tan bona com l'eliminació de quantificadors, però prou satisfactòria en molts casos.

10 Dimensió i estabilitat

Els models de les teories fortament minimal i els de les teories o-minimal tenen una dimensió que es defineix en termes de geometria combinatòria.

Un *operador de clausura finitari* és un conjunt X juntament amb una operació cl que assigna a cada subconjunt A de X un altre subconjunt $cl(A)$ de X (la seva *clausura*) i compleix les condicions següents:

1. $A \subseteq cl(A)$.
2. Si $A \subseteq B$, aleshores $cl(A) \subseteq cl(B)$.
3. $cl(cl(A)) \subseteq cl(A)$.
4. Si $a \in cl(A)$, aleshores existeix $A_0 \subseteq A$ finit tal que $a \in cl(A_0)$.

Una *pregeometria* és un operador de clausura finitari que compleix addicionalment la *condició d'intercanvi*: si $a, b \in X$ i $a \in cl(A \cup \{b\}) \setminus cl(A)$, llavors $b \in cl(A \cup \{a\})$. En una pregeometria diem que $a \in X$ és *independent* de $A \subseteq X$ si $a \notin cl(A)$. Diem que $A \subseteq X$ és *independent* si cada $a \in A$ és independent de $A \setminus \{a\}$. Una *base* de $A \subseteq X$ és un subconjunt independent maximal de A . Totes les bases de A tenen el mateix cardinal, que es diu *dimensió* de A .

La *clausura algebraica* d'un subconjunt A d'una estructura $\mathcal{M}$ és el conjunt $acl(A) \subseteq M$ format pels elements de M que pertanyen a algun conjunt finit definit mitjançant una fórmula amb paràmetres en A . La terminologia està motivada pel paral·lelisme que hi ha amb la clausura algebraica en un cos, obtinguda afegint zeros de polinomis. L'univers M amb l'operació acl és un cas particular d'operador de clausura finitari. Si $\mathcal{M}$ és fortament minimal o és o-minimal, la clausura algebraica acl compleix la condició d'intercanvi i, per tant, defineix una pregeometria a M . En el context o-minimal, la clausura algebraica $acl(A)$ coincideix a més amb la *clausura definible* $dcl(A)$, que és la col·lecció dels elements de M que són A -definibles. Per tant, en les estructures fortament minimal i en les estructures o-minimal tenim una dimensió algebraica (és a dir, provinent de l'operador acl de clausura algebraica) ben definida.

En una estructura fortament minimal $\mathcal{M}$, la dimensió algebraica és un invariant que determina l'isomorfisme: si $\mathcal{N} \equiv \mathcal{M}$, llavors $\mathcal{M} \cong \mathcal{N}$ si i només si $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$ tenen la mateixa dimensió. Això explica per què les teories fortament minimal són $\aleph_1$ -categòriques: la dimensió d'un model de cardinalitat $\aleph_1$ ha de ser $\aleph_1$.

En una estructura o-minimal, la dimensió no és suficient per a determinar l'isomorfisme. Se sap que si $\mathcal{M}$ és una estructura ordenada, per a cada cardinal $\kappa \geq \aleph_1$, existeixen 2^κ estructures de cardinalitat κ que són elementalment equivalents a $\mathcal{M}$ però no són isomorfes entre si.

La diferència de comportament de la dimensió entre les teories fortament minimal i les o-minimal té a veure amb el fet que les primeres són *teories estables*, mentre que les segones són inestables. Una manera de definir l'estabilitat d'una teoria és en termes de la inexistència de determinats grafs: una teoria és estable si en cap dels seus models $\mathcal{M}$ existeix una relació definible R que ordeni totalment un subconjunt infinit $X \subseteq M^n$, és a dir, el graf que R defineix en el conjunt d'ènuples de X és un ordre total d'aquest conjunt X . Però el conjunt X mateix no ha de ser necessàriament definible i pot ser que la relació R no defineixi ni tan sols un ordre a M^n . Òbviament, qualsevol estructura que tingui un ordre definible no trivial té una teoria inestable. La noció de teoria estable i, per tant, la teoria de l'estabilitat, va ser introduïda per S. Shelah el 1969 a [18]. L'obra fonamental sobre l'estabilitat és el llibre [20] de Shelah. La teoria de l'estabilitat és un conjunt de nocions i tècniques destinades a l'anàlisi dels models de les teories estables. Són exemples de teories estables les dels mòduls, en particular els grups abelians, les teories dels cossos separablement tancats, les teories dels cossos diferencialment tancats i, en particular, les teories ACF_0 , ACF_p , $\text{Th}(\mathbb{Z}, +, 0, 1)$ i $\text{Th}(\mathbb{Z}, +, 0)$ ja discutides anteriorment. Es conjectura que tot cos la teoria del qual és estable ha de ser separablement tancat.

En els últims anys les nocions pròpies de l'estabilitat s'han adaptat a l'estudi d'estructures inestables. En aquest sentit tenen una importància especial les *teories simples* i les *teories NIP*. Les primeres inclouen les estables i van ser inicialment considerades per S. Shelah a [19] i després redescobertes i desenvolupades per B. Kim i A. Pillay a partir de 1995 (vegeu [6] i el text [29] de F. O. Wagner). Exemples importants d'estructures amb teories simples són els cossos pseudofinit i els cossos amb automorfismes genèrics. Les teories d'estructures ordenades no són simples.

Les teories NIP inclouen també les estables, però moltes d'aquestes són compatibles amb un ordre. De fet, totes les teories o-minimal són NIP. Un text recent de referència sobre teories NIP és el llibre [21] de P. Simon. El cas més elemental de les teories NIP el constitueixen les anomenades *teories dp-minimal*. No inclouen totes les estables, però sí les fortament minimal, les o-minimal, l'aritmètica de Presburger i exemples nous, com ara les teories dels cossos p -àdics.

Les recerques més recents van molt més enllà de les teories simples i les teories NIP. G. Conant ha dissenyat un mapa, que es pot visitar a <http://www.forkinganddividing.com/>, en el qual es dibuixen els tipus principals de teories que avui s'analitzen, i es representen com a punts d'aquest mapa alguns exemples importants. L'anomena *el mapa de l'univers de la teoria de models*.

Agraïments

Agraeixo a la doctora Carme Cascante, exdegana de la Facultat de Matemàtiques de la Universitat de Barcelona, la invitació que em va fer per a donar la lliçó en què es basa aquest article.

Referències

- [1] BALDWIN, J. T.; LACHLAN, A. H. «On strongly minimal sets». *J. Symbolic Logic*, 36 (1971), 79-96.
- [2] CEGIELSKI, P. «Théorie élémentaire de la multiplication des entiers naturels». A: *Model Theory and Arithmetic* (París, 1979-1980). Berlín; Nova York: Springer, 1981, 44-89. (Lecture Notes in Math.; 890)
- [3] ENDERTON, H. B. *A Mathematical Introduction to Logic*. Nova York; Londres: Academic Press, 1972.
- [4] ENDERTON, H. B. *Elements of Set Theory*. Nova York; Londres: Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], 1977.
- [5] GÖDEL, K. «Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I». *Monatsh. Math. Phys.*, 38 (1) (1931), 173-198.
- [6] KIM, B.; PILLAY, A. «Simple theories». Joint AILA-KGS Model Theory Meeting (Florence, 1995). *Ann. Pure Appl. Logic*, 88 (2-3) (1997), 149-164.
- [7] MACINTYRE, A. «On ω_1 -categorical theories of fields». *Fund. Math.*, 71 (1) (1971), 1-25.
- [8] MACINTYRE, A.; MCKENNA, K.; VAN DEN DRIES, L. «Elimination of quantifiers in algebraic structures». *Adv. in Math.*, 47 (1) (1983), 74-87.
- [9] MACINTYRE, A.; WILKIE, A. J. «On the decidability of the real exponential field». A: *Kreiseliana*. Wellesley, MA: A K Peters, 1996, 441-467.
- [10] MORLEY, M. «Categoricity in power». *Trans. Amer. Math. Soc.*, 114 (1965), 514-538.
- [11] PILLAY, A.; STEINHORN, C. «Definable sets in ordered structures. I». *Trans. Amer. Math. Soc.*, 295 (2) (1986), 565-592.
- [12] PRESBURGER, M. «Über die Vollständigkeit eines gewissen Systems der Arithmetik ganzer Zahlen, in welchem die Addition als einzige Operation hervortritt». A: *Comptes Rendus Premier Congrès des Mathématiciens des Pays Slaves*. Varsòvia, 1930, 92-101, 395.
- [13] REINEKE, J. «Minimale Gruppen». *Z. Math. Logik Grundlagen Math.*, 21 (4) (1975), 357-359.
- [14] RICHARD, J. «Les principes des mathématiques et le problème des ensembles». *Rev. générale des Sc.*, 16 (12) (1905), 541-542.
- [15] ROBINSON, J. «Definability and decision problems in arithmetic». *J. Symbolic Logic*, 14 (1949), 98-114.
- [16] RUSSELL, B. «Les paradoxes de la logique». *Rev. de métaphys. et de morale*, 14 (1906), 627-650.
- [17] RYLL-NARDZEWSKI, C. «On the categoricity in power $\leq \aleph_0$ ». *Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astr. Phys.*, 7 (1959), 545-548.
- [18] SHELAH, S. «Stable theories». *Israel J. Math.*, 7 (1969), 187-202.
- [19] SHELAH, S. «Simple unstable theories». *Ann. Math. Logic*, 19 (3) (1980), 177-203.

- [20] SHELAH, S. *Classification Theory and the Number of Nonisomorphic Models*. 2a ed. Amsterdam: North-Holland Publishing Co., 1990. (Studies in Logic and the Foundations of Mathematics; 92)
- [21] SIMON, P. *A Guide to NIP Theories*. Chicago, IL: Association for Symbolic Logic; Cambridge: Cambridge Scientific Publishers, 2015. (Lecture Notes in Logic; 44)
- [22] SKOLEM, TH. *Über einige Satzfunktionen in der Arithmetik*. Oslo: I kommission hos J. Dybwad, 1931. (Norske videnskaps-akademi i Oslo. Skrifter. I. Mat.-naturv. klasse; 7)
- [23] TARSKI, A. «Sur les ensembles définissables de nombres réels. I». *Fund. Math.*, 17 (1931), 210-239.
- [24] TARSKI, A. *A Decision Method for Elementary Algebra and Geometry*. 2a ed. Berkeley; Los Angeles, Calif.: University of California Press, 1951.
- [25] TENT, K.; ZIEGLER, M. *A Course in Model Theory*. La Jolla, CA: Association for Symbolic Logic; Cambridge: Cambridge University Press, 2012. (Lecture Notes in Logic; 40)
- [26] VAN DEN DRIES, L. «Remarks on Tarski's problem concerning $(\mathbf{R}, +, \cdot, \exp)$ ». A: *Logic Colloquium '82* (Florence, 1982). Amsterdam: North-Holland, 1984, 97-121. (Stud. Logic Found. Math.; 112)
- [27] VAN DEN DRIES, L. *Tame Topology and o-minimal Structures*. Cambridge: Cambridge University Press, 1998. (London Mathematical Society Lecture Note Series; 248)
- [28] WAGNER, F. O. «Minimal fields». *J. Symbolic Logic*, 65 (4) (2000), 1833-1835.
- [29] WAGNER, F. O. *Simple Theories*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2000. (Mathematics and its Applications; 503)
- [30] WILKIE, A. J. «Model completeness results for expansions of the ordered field of real numbers by restricted Pfaffian functions and the exponential function». *J. Amer. Math. Soc.*, 9 (4) (1996), 1051-1094.

Grafs aleatoris: teoria i aplicacions, de la naturalesa a la societat i al cervell

MIHYUN KANG I ZDENĚK PETRÁŠEK

Resum: La teoria dels grafs aleatoris tracta de les propietats asimptòtiques dels grafs dotats d'una determinada distribució de probabilitat; per exemple, estudia com evoluciona l'estructura de les components d'un graf aleatori uniforme a mesura que el nombre d'arestes augmenta. Des de l'inici de la teoria dels grafs aleatoris, formulada per Erdős i Rényi fa més de cinquanta anys, s'han introduït i estudiat diversos models de grafs aleatoris. Mentrestant la teoria de grafs s'ha anat obrint camí en altres ciències com una font molt rica de models per a descriure aspectes fonamentals d'un ventall molt ampli de fenòmens de gran complexitat. Aquest article és una introducció a la teoria dels grafs aleatoris i els seus progressos recents (amb èmfasi en la transició de fase i els fenòmens crítics, un tema favorit del primer autor) i a les aplicacions d'aquesta teoria.

Es tracta d'una versió ampliada de l'article «Random graphs: from nature to society to the brain» [35] publicat al *Seoul Intelligencer*, un número especial del *Math. Intelligencer*, editat en ocasió del Congrés Internacional de Matemàtics que va tenir lloc a Seül l'any 2014.

Paraules clau: component gegant, transició de fase, teoremes límit, grafs aleatoris.

Classificació MSC2010: 05C80, 05C65.

1 Grafs aleatoris d'Erdős-Rényi

1.1 El començament

Erdős i Rényi van iniciar la teoria dels grafs aleatoris en el seu article «On random graphs I.» [26], publicat el 1959, en el qual van considerar, entre altres qüestions, el problema de trobar la probabilitat que un graf aleatori sigui connex, i la probabilitat que la component més gran d'un graf aleatori cobreixi gairebé tots els vèrtexs. En un article posterior titulat «On the evolution of random graphs», i publicat el 1960 [27], Erdős i Rényi van descobrir que un graf

Aquest treball va aparèixer en anglès amb el títol «Random graphs: theory and applications from nature to society to the brain» a *Internationale Mathematische Nachrichten*, 227 (2014), 1–24, revista de la Societat Austríaca de Matemàtiques. Agraïm als editors d'aquesta revista el permís per a publicar-ne la traducció al català feta pels editors i revisada per Marc Noy.

aleatori experimenta un canvi dràstic en el nombre de vèrtexs de la component més gran quan el nombre d'arestes és aproximadament la meitat del nombre de vèrtexs, és a dir, hi ha una *transició de fase* en l'evolució d'un graf aleatori davant de *l'aparició de la component gegant*.

Abans de passar a discutir el fenomen de la transició de fase amb més detall, introduïm algunes definicions bàsiques. Un graf $G = (V, E)$ és un parell que consisteix en un conjunt V dels vèrtexs (o nodes) i un conjunt E de les arestes (o línies), que són subconjunts de dos elements de V . El nombre d'arestes incidents a un vèrtex s'anomena el *grau* del vèrtex. Una successió de vèrtexs diferents $(v_1, \dots, v_k)$ en la qual cada parell consecutiu de vèrtexs forma una aresta s'anomena un *camí* de v_1 a v_k si $v_1 \neq v_k$, i s'anomena un *cicle* si $v_1 = v_k$. Es diu que un vèrtex v és *accessible* des d'un altre vèrtex w si hi ha un camí de v a w . L'accessibilitat és una relació d'equivalència i les classes d'equivalència són les *components* de G . El nombre de vèrtexs que hi ha en una component és l'*ordre* de la component. Si un graf només té una component, es diu que és *connex*. Un graf connex sense cicles s'anomena un *arbre*, i un graf sense cicles és un *bosc*. Un graf connex que tingui exactament un cicle s'anomena *unicíclic*.

1.2 Models d'Erdős-Rényi de grafs aleatoris

Sota el nom de *grafs aleatoris d'Erdős-Rényi* es coneixen tres models de grafs aleatoris:

- (1) El graf aleatori uniforme $G(n, m)$ és un graf elegit uniformement a l'atzar d'entre el conjunt de tots els grafs que tenen com a conjunt de vèrtexs $[n] := \{1, \dots, n\}$ i m arestes, per a un enter $0 \leq m \leq \binom{n}{2}$.
- (2) El graf aleatori binomial $G(n, p)$ és un graf que té com a conjunt de vèrtexs $[n]$, en el qual cada parell de vèrtexs està unit per una aresta de manera independent amb probabilitat p , per a un número real $0 \leq p \leq 1$.
- (3) El procés d'Erdős-Rényi $\{G_n(m) : m = 0, \dots, \binom{n}{2}\}$ comença amb un graf $G_n(0)$ que té n vèrtexs aïllats i cap aresta, i a cada pas $1 \leq m \leq \binom{n}{2}$ s'afegeix una nova aresta, de manera aleatòria, a un graf $G_n(m-1)$ que evoluciona a un nou graf $G_n(m)$. El graf $G_n(m)$ obtingut amb el procés d'Erdős-Rényi està distribuït com el graf aleatori uniforme $G(n, m)$.

Els tres models anteriors són essencialment equivalents quan els paràmetres se seleccionen adequadament, és a dir, si $m = p \binom{n}{2}$. El graf aleatori uniforme i el graf aleatori binomial havien estat estudiats prèviament, entre d'altres, per Gilbert [29]. Un quart de segle després Bollobás [13] va observar que el graf aleatori uniforme $G(n, m)$ es pot considerar com un graf $G_n(m)$ creat pel procés d'Erdős-Rényi.

Quan discutim propietats dels grafs aleatoris d'Erdős-Rényi farem servir la parametrització $m = t n/2$ o $p = t/(n-1)$, de manera que t representa el grau esperat d'un vèrtex, i tractarem amb propietats que es compleixen *amb gran probabilitat* (abreujat *agp*), en el sentit que la seva probabilitat tendeix a 1 quan el nombre n de vèrtexs tendeix cap a infinit.

1.3 Aparició de la component gegant

Un dels descobriments més importants d'Erdős i Rényi [27] tracta de l'aparició de la transició de fase en l'ordre de la component més gran: dit d'una manera breu, l'ordre de la component més gran en el graf aleatori d'Erdős-Rényi passa de l'ordre logarítmic al lineal quan el grau esperat passa per 1 (per exemple, de 0.99 a 1.01) a mesura que s'afegeixen arestes.

Per tal de ser més precisos, considerem el graf aleatori d'Erdős-Rényi amb grau esperat $t > 0$. Si el grau esperat t és més petit que el valor crític 1, llavors *agp* el graf aleatori d'Erdős-Rényi està format per arbres i components unicíclics i la component més gran és un arbre d'ordre $O(\log n)$; aquestes components s'anomenen «petites». En canvi, si el grau esperat t és més gran que 1, aleshores *agp* hi ha una única component màxima d'ordre lineal (anomenada la *component gegant*), mentre que totes les altres són arbres o bé components unicíclics d'ordre $O(\log n)$; en altres paraules, totes les components tret de la gegant són «petites». Si el grau esperat t és igual al valor crític 1, llavors *agp* l'ordre de la component més gran és $\Theta(n^{2/3})$.

La raó per la qual el grau esperat igual a 1 és tan crucial de cara a l'aparició de la component gegant en el graf $G(n, p)$ va ser molt ben explicada per Karp [40], que va utilitzar el procés següent de descoberta de les components basat en cerca d'amplada. Donat un vèrtex v , primer descobrim els seus veïns (diguem fills) de v . Després descobrim els veïns de cadascun dels veïns de v , l'un després de l'altre. I continuem així fins que no quedin més vèrtexs a la component de v . És a dir, d'una manera aproximada, en el moment que $k = o(n)$ vèrtexs han estat explorats, el nombre de fills de cada vèrtex és una variable aleatòria binomial amb paràmetres $n - k$ i p , i, per tant, d'esperança $(n - k)p \sim t$. Com que la distribució binomial $\text{Bi}(n - k, p)$ convergeix cap a la distribució de Poisson $\text{Po}(t)$ amb mitjana $t = p(n - 1)$, quan $n \rightarrow \infty$ i t és una constant fixada, podem aproximar el procés de descoberta de components pel procés de ramificació de Galton-Watson amb distribució de descendents donada per $\text{Po}(t)$; es comença amb un organisme unisexual que engendra un nombre aleatori de fills d'acord amb $\text{Po}(t)$, i cadascun dels fills independentment engendra un nombre aleatori de fills d'acord amb $\text{Po}(t)$, i així successivament. La teoria clàssica dels processos de ramificació diu que si $t < 1$, llavors amb probabilitat 1 el procés s'acaba; això correspon a les components petites de $G(n, p)$. D'altra banda, si $t > 1$, amb probabilitat positiva el procés continua per sempre. La probabilitat de supervivència és l'única solució positiva, $\rho = \rho(t) \in (0, 1)$, de l'equació

$$1 - \rho = e^{-t\rho}. \quad (1)$$

Aquesta probabilitat de supervivència correspon a la probabilitat que un vèrtex aleatori de $G(n, p)$ estigui a la component gegant. Aquest punt de vista es pot justificar rigorosament i dona que quan $t > 1$, llavors *agp* l'ordre de la component gegant de $G(n, p)$ és $\rho n + o(n)$.

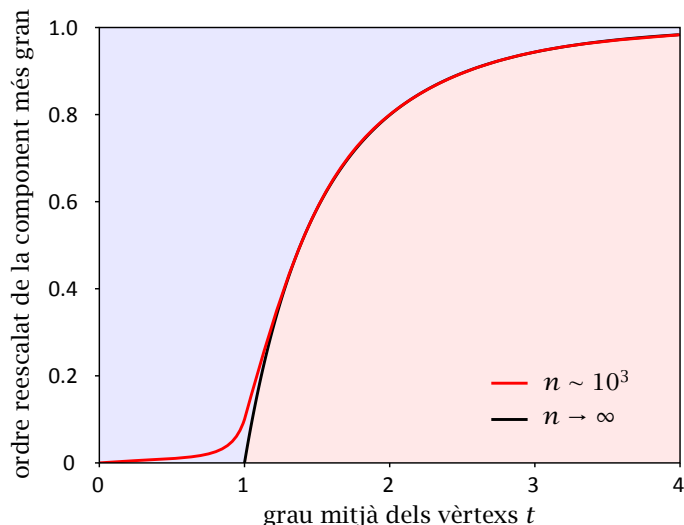


FIGURA 1: Transició de fase al graf aleatori d'Erdős-Rényi.

1.4 Finestra crítica de la transició de fase

D'acord amb el resultat d'Erdős i Rényi, l'ordre de la component més gran passa de logarítmic a sublineal i després a l'ordre lineal; més precisament canvia de $O(\log n)$ a $\Theta(n^{2/3})$ i a $\Theta(n)$, segons si el grau esperat t compleix $t < 1$, $t = 1$, o bé $t > 1$. Erdős i Rényi descriuen aquest fenomen com un «doble salt» i el consideren com un dels fets més sorprenents en relació amb els grafs aleatoris.

Això porta a diverses preguntes naturals: *hi ha realment salts?* Dit d'una altra manera, la transició de fase en el graf aleatori d'Erdős-Rényi és discontinua? O bé és contínua? En el cas que sigui contínua, la transició de fase és «suau» o bé té «punxes»? Com de gran hauria de ser la diferència entre el grau esperat d'un vèrtex i el valor crític 1, per tal de poder distingir l'ordre de la component més gran de l'ordre de la segona component més gran?

Bollobás [13] va provar que de fet no hi ha un salt, sinó que hi ha una *transició de fase suau amb tres fases diferents* quan el nombre d'arestes és aproximadament igual a la meitat del nombre de vèrtexs: la fase subcrítica en la qual *agp* hi ha moltes components petites d'ordre gairebé igual; la fase crítica en la qual *agp* hi ha poques components grans d'ordre semblant mòdul un factor constant, i la fase supercrítica, la qual es caracteritza pel fet que *agp* hi ha una component de mida màxima que és molt més gran que la segona component més gran. El resultat de Bollobás va ser millorat per Łuczak [44].

Per tal d'establir els resultats de Bollobás i Łuczak, considerem el graf aleatori binomial $G(n, p)$ amb $p = \frac{t}{n-1}$, on $t = 1 \pm \epsilon$ per a $\epsilon = \epsilon(n) > 0$ que compleix $\epsilon \rightarrow 0$, de manera que el grau esperat tendeix cap a 1. Per tal de veure com de ràpid tendeix ϵ cap a zero, sigui $\omega(n)$ una funció que tendeix cap a infinit arbitràriament a poc a poc amb n i sigui $\epsilon = \epsilon(n)$ complint $\omega(n) \leq \epsilon^3 n$.

Dit d'una altra manera, fem $\epsilon \rightarrow 0$ i $\epsilon^3 n \rightarrow \infty$. Si $t = 1 - \epsilon$, llavors per a qualsevol enter positiu fixat i , *agp* l'ordre de la i -èsima component més gran és, asimptòticament, $2\epsilon^{-2} \log(\epsilon^3 n)$, que és una quantitat considerablement menor que $n^{2/3}$. D'altra banda, si $t = 1 + \epsilon$, *agp* l'ordre de la component més gran és, asimptòticament, $2\epsilon n$, que és substancialment més gran que $n^{2/3}$, i l'ordre de la segona component més gran és substancialment més petita que $n^{2/3}$.

Quan $\epsilon^3 n = \Theta(1)$, Aldous [4] va donar una descripció precisa de la successió dels ordres (reescalats per $n^{2/3}$) de les components més grans, fent servir processos multiplicatius coalescents i una successió de longituds de les excursions d'un moviment brownià inhomogeni i reflectant.

1.5 Teoremes del límit per a la component gegant

Es pot dir alguna cosa més sobre la distribució de l'ordre de la component gegant quan el grau esperat t és més gran que 1?

Sigui $I \subset (1, \infty)$ un interval compacte, $p = p(n)$ una successió tal que $t = p(n-1) \in I$ per a tot n i sigui $\rho = \rho(t) \in (0, 1)$ l'única solució positiva de l'equació (1). Denotem per $L_1(t)$ l'ordre de la component gegant de $G(n, p)$.

El primer teorema límit per a la component gegant és una *lleï forta dels grans números* que assegura que per a qualssevol $\delta_1, \delta_2 > 0$, existeix $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que per a qualsevol $n \geq n_0$,

$$1 - \delta_2 \leq \mathbb{P} \left[\left| \frac{L_1(t)}{n} - \rho \right| \leq \delta_1 \right] \leq 1 + \delta_2.$$

Així doncs, el valor típic de $L_1(t)$ es pot determinar, tret de fluctuacions d'ordre $o(n)$.

Una pregunta natural és si es pot caracteritzar la distribució de $L_1(t)$ d'una manera més precisa. Definim $\mu = \mu(\rho, n)$ i $\sigma = \sigma(t, \rho, n)$ com

$$\mu := \rho n \quad \text{i} \quad \sigma := \sqrt{\frac{\rho(1-\rho)}{(1-t(1-\rho))^2} n}.$$

Es pot provar que $\sigma^{-1}(L_1(t) - \mu)$ convergeix en distribució cap a $N(0, 1)$, on $N(0, 1)$ denota la distribució normal estàndard. Això dona un *teorema de límit central* per a $L_1(t)$: per a qualssevol $a < b$ amb $a, b \in \mathbb{R}$ i qualsevol $\delta > 0$, existeix $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que per a tot $n \geq n_0$

$$\frac{1-\delta}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt \leq \mathbb{P} \left[a \leq \frac{L_1(t) - \mu}{\sigma} \leq b \right] \leq \frac{1+\delta}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt.$$

D'aquesta manera es pot estimar el valor de $L_1(t)$ fins a un error de $o(\sigma) = o(\sqrt{n})$.

De fet, es pot deduir un resultat encara més fort, un *teorema de límit local* per a $L_1(t)$: per a qualsevol interval compacte $J \subset \mathbb{R}$ i qualsevol $\delta > 0$, existeix $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que per a $n \geq n_0$ i $k \in \mathbb{N}$ que compleixi $\sigma^{-1}(k - \mu) \in J$, llavors

$$\frac{1-\delta}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(k-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \leq \mathbb{P}[L_1(t) = k] \leq \frac{1+\delta}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(k-\mu)^2}{2\sigma^2}\right).$$

Aquests resultats van ser establerts per Stepanov [64] i Pittel i Wormald [54] fent servir tècniques de comptatge, i van ser tornats a provar per Behrisch, Coja-Oghlan i Kang [10] aplicant el mètode de Stein al nombre total de vèrtexs fora de la component gegant.

Encara són vàlids resultats molt més forts. Stepanov [64] i Pittel i Wormald [54] proven un *teorema de límit local per a la distribució conjunta* del nombre de vèrtexs i d'arestes de la component gegant. Behrisch, Coja-Oghlan i Kang [10] obtenen també aquest teorema fent servir l'anomenada *exposició en dues voltes* i tècniques de regularització, així com l'anàlisi de Fourier. Sigui $E(t)$ el nombre d'arestes de la component gegant de $G(n, p)$, definim

$$\begin{aligned}\mu_e &:= \frac{t(1 - (1 - \rho)^2)}{2}n, \\ \sigma_e &:= \sqrt{\left(\frac{t^2(1 - \rho)^2(2 - (2t - 1)\rho(1 - \rho))}{(1 - t(1 - \rho))^2} + \frac{t(1 - (1 - \rho)^2)}{2}\right)}n, \\ \sigma_j &:= \frac{t(1 - \rho)(1 - (1 - \rho)^2 + t\rho(1 - \rho))}{(1 - t(1 - \rho))^2}n^2.\end{aligned}$$

Llavors per a tot parell d'interval·s compactes $J, J_e \subset \mathbb{R}$ i tot $\delta > 0$ existeix $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que per a qualsevol $n \geq n_0$ i enters $k, \ell \in \mathbb{N}$ que compleixin $\sigma^{-1}(k - \mu) \in J$ i $\sigma_e^{-1}(\ell - \mu_e) \in J_e$ hom té

$$(1 - \delta)\Phi(k, \ell) \leq \mathbb{P}[L_1(t) = k \text{ and } E(t) = \ell] \leq (1 + \delta)\Phi(k, \ell),$$

on

$$\begin{aligned}\Phi(k, \ell) &:= \frac{1}{2\pi\sqrt{\sigma^2\sigma_e^2 - \sigma_j^2}} \cdot \\ &\cdot \exp\left(-\frac{\sigma^2\sigma_e^2}{2(\sigma^2\sigma_e^2 - \sigma_j^2)}\left(\frac{(k - \mu)^2}{\sigma^2} - \frac{2\sigma_j(k - \mu)(\ell - \mu_e)}{\sigma^2\sigma_e^2} + \frac{(\ell - \mu_e)^2}{\sigma_e^2}\right)\right).\end{aligned}$$

Pel que fa a teoremes de límit locals en la situació més sofisticada del *règim supercrític* quan $t = 1 + \epsilon$ per a $\epsilon = \epsilon(n) > 0$ que compleix $\epsilon \rightarrow 0$ i $\epsilon^3 n \rightarrow \infty$, Bollobás i Riordan [17] donen una prova nova i senzilla per a la llei forta dels grans números per a l'ordre de la component gegant, fent servir el procés de ramificació de Galton-Watson. Pittel i Wormald [54] estableixen un teorema de límit central per a l'ordre de la component gegant, sempre en règim supercrític, comptant grafs connexos. El seu resultat va ser tornat a provar recentment per Bollobás i Riordan [18], fent servir passeig aleatori i arguments de martingales.

2 Generalitzacions dels grafs aleatoris d'Erdős-Rényi

Des del treball inicial d'Erdős i Rényi [27], s'han estudiat amb detall diversos models de grafs aleatoris. Per exemple, s'han estudiat els hipergrafs aleatoris, els grafs planars aleatoris, els processos de grafs aleatoris i els grafs aleatoris no homogenis. Tot seguit fem un repàs breu de cadascun d'ells.

2.1 Hipergrafs aleatoris

Una de les generalitzacions més naturals dels grafs aleatoris d'Erdős-Rényi $G(n, p)$ és l'hipergraf aleatori k -uniforme $H_k(n, p)$, que és un hipergraf amb conjunt de vèrtexs $[n]$ en el qual cadascuna de les $\binom{n}{k}$ possibles arestes (és a dir, els subconjunts de k elements de $[n]$) apareix de manera independent amb probabilitat p .

Diem que un vèrtex v en un hipergraf H és accessible des de w (o bé que v i w estan connectats) si existeix una successió d'arestes $(e_1, \dots, e_\ell)$ tal que $v \in e_1$, $w \in e_\ell$ i $e_i \cap e_{i+1} \neq \emptyset$ per a tot $1 \leq i \leq \ell - 1$. L'accessibilitat és una relació d'equivalència i les classes d'equivalència s'anomenen les *components* de H .

Els fenòmens de transició de fase es van descobrir també en els hipergrafs aleatoris. El punt crític d'aparició de la component gegant de $H_k(n, p)$ va ser determinat per primera vegada per Schmidt-Pruzan i Shamir a [61]. D'una manera més precisa, sigui $p = t(k-1)^{-1} \binom{n-1}{k-1}^{-1}$, per a $t > 0$. Schmidt-Pruzan i Shamir van provar que si $t < 1$, llavors *agp* el nombre de vèrtexs de la component més gran és $O(\log n)$, però si $t > 1$, llavors *agp* hi ha una única component que conté un nombre de vèrtexs lineal en n . De fet, encara se sap més: *agp* el nombre de vèrtexs de la component gegant és $\rho n + o(n)$, on $\rho = \rho(k, t) \in (0, 1)$ és l'única solució positiva de l'equació

$$1 - \rho = \exp(t((1 - \rho)^{k-1} - 1)).$$

Quan $k = 2$, això correspon al resultat esmentat en el cas d'un graf.

Karoński i Łuczak [39] van estudiar la transició de fase en la fase supercrítica inicial, quan $t = 1 + o((\log n / n \log \log n)^{1/3})$, i van provar un teorema de límit local per al nombre de vèrtexs de la component més gran. Behrisch, Coja-Oghlan i Kang [11] van establir teoremes de límit central i local per al nombre de vèrtexs de la component més gran quan $t > 1 + \epsilon$ per a un $\epsilon > 0$ fixat arbitràriament petit. A més a més van obtenir el teorema de límit local per a la distribució conjunta del nombre de vèrtexs i del nombre d'arestes de la component més gran de $H_k(n, p)$. Com una aplicació, Behrisch, Coja-Oghlan i Kang [11] van trobar una fórmula asimptòtica per a la probabilitat que $H_k(n, p)$ sigui connex. Amb aquesta finalitat fan servir punts de vista nous purament probabilístics, com ara *l'exposició de les arestes en dues rondes*, el mètode de Stein i l'anàlisi de Fourier. Bollobás i Riordan [18] van provar a continuació que la distribució del nombre de vèrtexs de la component més gran tendeix cap a una distribució normal per a $t = 1 + \epsilon$ quan $\epsilon = \epsilon(n) > 0$ compleix $\epsilon^3 n \rightarrow \infty$, és a dir, durant tot el règim supercrític.

Aquests teoremes de límit local estan molt relacionats amb el *nombre asimptòtic d'hipergrafs connexos i k-uniformes* amb n vèrtexs i m arestes. Fent servir enumeració combinatòria, Karoński i Łuczak [39] troben el nombre asimptòtic d'hipergrafs connexos k -uniformes amb un nombre donat de vèrtexs i d'arestes en el règim quasi supercrític quan $m - \frac{n}{k-1} \ll \frac{\log n}{\log \log n}$. Behrisch, Coja-Oghlan i Kang troben el resultat corresponent a partir del teorema de límit

local per al règim estrictament supercrític quan $m - \frac{n}{k-1} = \Theta(n)$, i Bollobás i Riordan [19] consideren després el règim supercrític $m - \frac{n}{k-1} = o(n)$. Sato i Wormald [60] també obtenen el nombre asimptòtic d'hipergrafs connexos 3-uniformes fent servir cors (*cores*, en anglès) i nuclis quan $n^{1/3} \log^2 n \ll m - \frac{n}{2} \ll n$.

2.2 Hipergrafs aleatoris com a complexos simplicials aleatoris

Els hipergrafs aleatoris es poden interpretar com a complexos simplicials aleatoris; per exemple, els hipergrafs aleatoris 3-uniformes es poden veure com a 2-complexos simplicials aleatoris, considerant els subconjunts de 3 elements com a 2-cel·les triangulars i els subconjunts de 2 elements com a 1-cel·les. Les propietats topològiques dels complexos simplicials aleatoris —tals com la col·lapsabilitat i l'anul·lació de l'homologia de dimensió màxima— van ser investigades, per exemple, a [5, 6, 43].

Motivats en part per l'estudi dels complexos simplicials aleatoris, considerarem la connectivitat d'ordre superior. La noció de connectivitat d'ordre superior en hipergrafs és, de totes maneres, ambigua i de fet hi ha diverses definicions possibles. Per exemple, podem prendre la que van suggerir Bollobás i Riordan [18], és a dir, la *j*-pla connectivitat: un subconjunt de *j* elements J_1 es diu que és *accessible* des d'un altre subconjunt de *j* elements J_2 si existeix una successió d'arestes $(E_1, \dots, E_\ell)$ tal que $J_1 \subseteq E_1$, $J_2 \subseteq E_\ell$ i $|E_i \cap E_{i+1}| \geq j$ per a cada $i = 1, \dots, \ell - 1$. L'accessibilitat és una relació d'equivalència en els subconjunts de *j* elements i les classes d'equivalència s'anomenen *j*-pla components connexes o simplement *j*-components. El cas $j = 1$ correspon a la noció de connexió per a vèrtexs.

A la vista de l'aparició d'una *j*-component gegant per a qualsevol $1 \leq j \leq k - 1$, Cooley, Kang i Person [25] van mostrar que $H_k(n, p)$ experimenta una transició de fase al llindar $p_{k,j} := \frac{1}{\binom{k}{j}-1 \cdot \binom{n-j}{k-j}}$. Sigui $p = t \cdot p_{k,j}$ per a $t > 0$ i sigui $L_j(t)$ el nombre de subconjunts de *j* elements continguts a la *j*-component més gran de $H_k(n, p)$. Per a un $\epsilon > 0$ fixat, arbitràriament petit, Cooley, Kang i Person van provar que $\text{agp } L_j(t) = \Omega(\epsilon n^j)$ i que la component gegant és única si $t = 1 + \epsilon$, però $L_j(t) = O(\epsilon^{-2} \log n)$ si $t = 1 - \epsilon$.

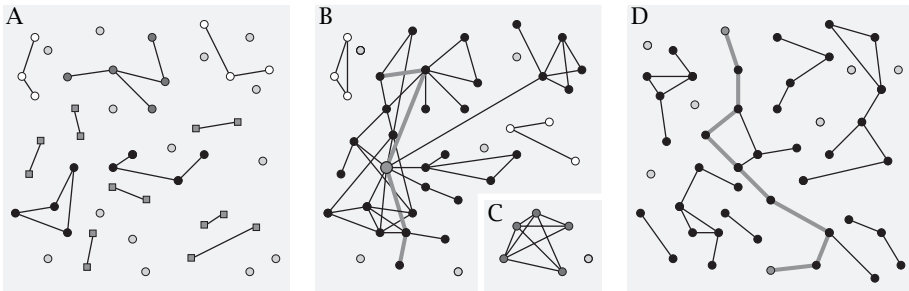
Cooley, Kang i Koch [24] van estudiar amb més detall la component gegant en el règim supercrític i van veure que quan $t = 1 + \epsilon$ per a $\epsilon = \epsilon(n) > 0$ que compleixi $\epsilon \rightarrow 0$ i $\epsilon^3 n \rightarrow \infty$, $\text{agp } L_j(t) = (1 + o(1)) 2\epsilon \frac{1}{\binom{k}{j}-1} \binom{n}{j}$. Per a $k = 2$, $j = 1$, el llindar i el nombre de vèrtexs de la component gegant coincideixen amb els del cas d'un graf: $p_{2,1} = \frac{1}{n-1}$ i $\text{agp } L_1(t) = (1 + o(1)) 2\epsilon n$.

Aquests resultats plantegen diverses qüestions. Què podem dir de $L_j(t)$ en el règim crític quan $t = 1$? I sobre el nombre de subconjunts de *j* elements continguts en la segona *j*-component més gran en el règim supercrític? Quina és la distribució del nombre de subconjunts de *j* elements continguts en la *j*-component gegant? Hi ha teoremes de límit central o local per a la *j*-component gegant?

2.3 Grafes planars aleatoris

Un graf es diu que és *planar* si es pot submergir en el pla sense creuar cap parell d'arestes. Un dels resultats més coneguts sobre grafes planars és el teorema dels quatre colors: diu que donada una separació del pla en regions, posem països, els països es poden acolorir fent servir quatre colors de manera que dos països amb frontera comuna no tinguin el mateix color.

Els grafes planars aleatoris van despertar un interès considerable des que McDiarmid, Steger i Welsh van obtenir propietats asimptòtiques importants dels grafes planars [48] i Giménez i Noy van determinar el nombre asimptòtic exacte de grafes planars etiquetats [30].



Quan el nombre d'arestes és petit, el graf aleatori té moltes components petites.

A mesura que s'afegeixen arestes emergeix una **component gegant** (en negre).

Els **grafes planars** es poden dibuixar en el pla de manera que les arestes no es tallin.

El **grau d'un vèrtex** és el nombre d'arestes adjacents. El vèrtex més gran de color gris de B té el màxim grau 9.

L'**ordre d'una component** és el nombre de vèrtexs que conté. La component de color negre de B té ordre 30, les components de A tenen ordres 5 (gris), 4 (negre), 3 (blanc), 2 (quadret gris) i 1 (gris clar).

El **diàmetre** d'un graf connex és la més gran de les distàncies entre dos vèrtexs. La component més gran de A té diàmetre tres, la de B quatre, la de C dos i la de D vuit.

En una xarxa **món petit**, la distància mínima típica entre dos vèrtexs de la component gran és «petita», *i. e.* la component més gran té un diàmetre petit (marcat amb una línia grisa més gruixuda a B i D).

Un grau alt d'**agrupament** vol dir que qualsevol entorn d'un vèrtex molt probablement és connex, com en la component grisa de C.

Les xarxes del món real sovint tenen **diàmetre** petit i un grau alt d'**agrupament**.

FIGURA 2: Conceptes bàsics de teoria de grafes.

Considerem un graf planar aleatori uniforme $P(n, m)$, elegit uniformement a l'atzar entre tots els grafes planars etiquetats amb n vèrtexs i m arestes.

Kang i Łuczak [36] van provar que, sorprenentment, hi ha *dos períodes crítics* en l'evolució d'un graf planar aleatori. El primer té lloc quan es forma la component gegant; això passa quan $m = n/2 + O(n^{2/3})$, de manera anàloga al cas del graf aleatori uniforme $G(n, m)$. El segon període crític d'un graf planar aleatori apareix quan la component gegant cobreix gairebé tots els vèrtexs; això passa quan $m = n + O(n^{3/5})$.

Tal com hem vist a la subsecció 1.3, després d'expressar els resultats en termes de $G(n, m)$, la component gegant de $G(n, m)$ emergeix sobtadament per a $m = n/2 + O(n^{2/3})$. Si $m = n/2 + s$ i $-n \ll s \ll -n^{2/3}$, llavors *agp* $G(n, m)$ està format per arbres aïllats i components uníclics, de manera que és un graf planar, i la seva component més gran és un arbre d'ordre $(1 + o(1)) \frac{n^2}{2s^2} \log \frac{|s|^3}{n^2}$. D'altra banda, si $n^{2/3} \ll s \ll n$, llavors *agp* $G(n, m)$ conté exactament una component complexa (anomenada la *component gegant*) d'ordre $(4 + o(1))s$, mentre que la segona component més gran és *agp* un arbre d'ordre $(1 + o(1)) \frac{n^2}{2s^2} \log \frac{s^3}{n^2}$; la qual cosa mostra una similitud remarcable entre el graf subcrític i el graf supercrític després de treure la component gegant. A més, si $s \gg n^{2/3}$, llavors *agp* $G(n, m)$ conté una còpia topològica de $K_{3,3}$ i, per tant, no és planar. Recordem que una component es diu complexa si conté més d'un cicle.

Una altra estructura aleatòria rellevant per al comportament d'un graf planar aleatori $P(n, m)$ és un bosc aleatori uniforme $F(n, m)$, és a dir, un bosc elegit uniformement a l'atzar entre tots els boscos etiquetats amb n vèrtexs i m arestes. Łuczak i Pittel [46] van descobrir que, malgrat que la component gegant de $F(n, m)$ apareix a $m = n/2 + O(n^{2/3})$, el comportament crític de $F(n, m)$ és una mica diferent del de $G(n, m)$ quan $n^{2/3} \ll s \ll n$. Sigui $m = n/2 + s$. Si $s \ll -n^{2/3}$, llavors les estructures de $F(n, m)$ i de $G(n, m)$ són similars, és a dir, l'ordre de l'arbre més gran de $F(n, m)$ és *agp* $(1 + o(1)) \frac{n^2}{2s^2} \log \frac{|s|^3}{n^2}$. Tot i així, en la fase supercrítica, quan $n^{2/3} \ll s \ll n$, l'arbre gegant de $F(n, m)$ és *agp* d'ordre $(2 + o(1))s$, que és aproximadament la meitat de l'ordre de la component més gran de $G(n, m)$, mentre que el segon arbre més gran de $F(n, m)$ és d'ordre $\Theta(n^{2/3})$, que és molt més gran que el de la segona component més gran de $G(n, m)$.

Łuczak i Kang van veure que fins a $m = n/2 + s$ amb $n^{2/3} \ll s \ll n$ (és a dir, el règim supercrític del primer període crític), el comportament de $P(n, m)$ és similar al comportament de $F(n, m)$. Dit d'una altra manera, *agp* l'ordre de la component complexa més gran és $(2 + o(1))s$, mentre que la segona component més gran té $\Theta(n^{2/3})$ vèrtexs. Per tant, a diferència de $G(n, m)$, no hi ha similitud entre el graf planar subcrític i el graf planar supercrític després de treure la component gegant.

El segon període crític en l'evolució de $P(n, m)$ no correspon a transicions de fase a $F(n, m)$ i a $G(n, m)$. Per tal de veure per què $P(n, m)$ presenta el segon tipus de comportament crític, observem que el nombre màxim d'arestes de $F(n, m)$ és $n - 1$, mentre que el de $P(n, m)$ és $3n - 6$, i, per tant, la taxa de creixement de l'ordre de les components complexes de $P(n, m)$ ha de canviar en algun punt. Łuczak i Kang van provar que això passa quan $m = n + O(n^{3/5})$.

De manera més precisa, posem $m = n + t$, on $t = o(n)$. Si $t \ll -n^{3/5}$ però $n/2 + t \gg n^{2/3}$, la component gegant de $P(n, m)$ conté *agp* $n - (2 + o(1))|t|$ vèrtexs, mentre que per a $n^{3/5} \ll t \ll n^{2/3}$ la component gegant conté $n - (\alpha + o(1))(n/t)^{3/2}$ vèrtexs per a alguna constant $\alpha > 0$ que es pot determinar. La condició poc convenient que $t \ll n^{2/3}$ és conseqüència del mètode de demostració i probablement es pot substituir per $t \ll n$.

2.4 Processos de grafes aleatoris

Una modificació natural del procés d'Erdős-Rényi és la classe de processos aleatoris basada en el model del *poder de les opcions múltiples*, que ara es coneixen amb el nom de *processos d'Achlioptas*. En cada pas dels processos d'Achlioptas es trien a l'atzar *dues* o més arestes potencials i, d'acord amb una regla determinada, se'n tria una i s'afegeix al graf que evoluciona.

Una qüestió natural és saber si hi ha una regla senzilla que canvia el temps crític per a l'aparició de la component gegant. La regla del producte va ser suggerida com la més apropiada per a retardar el temps crític: la regla del producte selecciona entre les dues arestes potencials la que minimitza el producte de les mides de les components dels seus vèrtexs extrems. Poc després, Bohman i Frieze van mostrar que una regla més simple, coneguda com *el procés de Bohman-Frieze*, retarda el temps crític [12]: si la primera aresta uneix dos vèrtexs aïllats, s'afegeix al graf en evolució; en cas contrari s'hi afegeix la segona aresta. El seu treball va mostrar que aquesta regla tan senzilla retarda l'aparició de la component gegant, és a dir, el punt crític de la transició de fase en el procés de Bohman-Frieze és estrictament més gran que 1. I va iniciar tres línies de recerca importants en el camp dels processos d'Achlioptas.

La primera línia tracta de comprovar la potència i els límits dels processos d'Achlioptas. Fins a quin punt podem accelerar o retardar la transició de fase? Quant podem retardar la formació d'un cicle hamiltonià? Aquestes qüestions es poden plantejar en el context original d'un procés d'Achlioptas o bé en el cas *off-line* que totes les parelles d'arestes estan donades al principi i després se'n fa la tria. Sovint els resultats es poden generalitzar al cas que en cada etapa es presenten ℓ arestes en lloc de 2, on ℓ és una constant fixada. Els resultats recents tenen a veure més aviat amb el retard de la transició de fase, la falta de subgrafs petits i l'acceleració de l'aparició de cicles hamiltonians.

La segona línia de recerca comporta l'elecció d'una regla d'Achlioptas fixa i l'exploració dels detalls subtils de l'evolució del graf. Per exemple, Spencer i Wormald [62] i Janson i Spencer [34] van examinar l'estat del procés de Bohman-Frieze després de $m = t n/2$ iteracions. Spencer i Wormald [62] van provar que hi ha un temps crític $t_c \sim 1.176$ en el qual el procés de Bohman-Frieze passa per una transició de fase: en la regió subcrítica $t = t_c - \epsilon$ (per a una constant $\epsilon > 0$) la component més gran és d'ordre $O(\log n)$, mentre que en la regió supercrítica $t = t_c + \epsilon$ hi ha una component gegant d'ordre $\Omega(n)$. Janson i Spencer [34] van estudiar la fase quasi supercrítica amb $t = t_c + \epsilon$ per a una constant petita $\epsilon > 0$

i van provar que *agp* la component més gran és d'ordre $\Theta(\epsilon n)$, i l'ordre de la segona component més gran és $\Theta(\epsilon^{-2} \log n)$. Kang, Perkins i Spencer [37] van mirar amb detall la distribució de la mida de la component pròxima a la regió crítica. De fet, el procés de Bohman-Frieze és la denominació curta d'una classe molt àmplia de regles d'Achlioptas, les anomenades *regles de mida limitada* introduïdes per Spencer i Wormald [62]. En una regla de mida limitada, l'elecció entre les dues arestes només depèn de la mida de les components que es poden connectar a través d'aquestes dues arestes, i totes les components d'ordre més gran que K s'han de tractar de la mateixa manera, per a una constant fixada K .

La tercera línia de recerca va orientada a entendre amb detall el comportament d'una classe general de processos d'Achlioptas. La distribució de les mides de les components en les regles de mida limitada ja s'havia determinat [58, 59]. L'interès pels processos d'Achlioptas va augmentar moltíssim quan Achlioptas, D'Souza i Spencer [1] van conjecturar, sobre la base de nombroses simulacions, que per a aquests processos la regla del producte es comporta de manera molt diferent de com ho fa per al procés d'Erdős-Rényi. Es produeix l'anomenada *percolació explosiva*; en d'altres paraules, l'ordre de la component més gran «salta» de l'ordre sublineal a l'ordre lineal en els passos sublineals del procés. Però Riordan i Warnke van provar que això no era així [57, 58]: la transició de fase per a una classe molt gran de processos d'Achlioptas generalitzats, inclosa la regla del producte, és contínua.

Malgrat l'estudi intensiu que s'ha dut a terme en relació amb els processos d'Achlioptas, el comportament detallat de la distribució de la mida de les components en molts processos d'Achlioptas encara no es coneix. Què més es pot dir sobre la fase de transició per a la regla del producte? Quin és el temps crític per a l'aparició de la component gegant? Com és de gran la component gegant poc després del punt crític? Quina és la mida de la finestra crítica?

2.5 Grafs aleatoris no homogenis

Una altra generalització natural, ben estudiada, del graf aleatori d'Erdős-Rényi són els grafs aleatoris amb una successió de graus donada —un exemple de grafs aleatoris no homogenis. Łuczak [45] i Chung i Lu [23] van estudiar l'estructura de les components d'un graf aleatori amb una successió donada de graus. La transició de fase en els grafs aleatoris amb una successió donada de graus ha estat tractada extensament, entre d'altres, per Molloy i Reed [50, 51], Newman, Strogatz i Watts [52], Kang i Seierstad [38], i Riordan [56].

Considerem una successió $\mathcal{D} = \{d_0(n), d_1(n), \dots\}$, amb $d_i(n) = 0$ per a $i \geq n$, i $\sum_{i \geq 0} d_i(n) = n$. El valor $d_i(n)$ representa el nombre de vèrtexs de grau i en un graf d'ordre n . Considerem ara un graf aleatori uniforme $G_n(\mathcal{D})$ que tingui $\mathcal{D}$ com a successió de graus. Sota una condició dèbil de regularitat per a $\mathcal{D}$, $\lambda_i(n) := d_i(n)/n$ convergeix cap a una constant: posem $\lambda_i^* = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_i(n)$ i $Q(\mathcal{D}) = \sum_{i \geq 1} i(i-2)\lambda_i^*$. Molloy i Reed [50, 51] van provar que si $Q(\mathcal{D}) < 0$, llavors *agp* totes les components de $G_n(\mathcal{D})$ són d'ordre $\Theta(\log n)$, mentre que si $Q(\mathcal{D}) > 0$, llavors *agp* $G_n(\mathcal{D})$ conté una única component gegant

d'ordre $\Theta(n)$. Kang i Seierstad [38] van estudiar la fase crítica quan $\sum_{i \geq 1} i(i-2)\lambda_i(n)$ convergeix cap a 0. Per tal d'establir com de ràpid la quantitat $\sum_{i \geq 1} i(i-2)\lambda_i(n)$ convergeix cap a 0, anomenem τ_n el zero més gran de la funció $Q_n(x) := \sum_{i \geq 1} i(i-2)\lambda_i(n)x^i$, és a dir, $Q_n(\tau_n) = 0$. Kang i Seierstad van determinar l'ordre de la component més gran en un règim dèbilment supercrític amb una llacuna logarítmica, és a dir, quan $(1 - \tau_n)n^{1/3} \gg \log n$. Aquí el paràmetre $1 - \tau_n$ fa per a $G_n(\mathcal{D})$ el mateix paper que $t - 1$ fa per a $G(n, p)$ quan $p = t/(n - 1)$. Més recentment, Riordan [56] ha determinat l'amplada exacta de la finestra crítica i la distribució límit de l'ordre asimptòtic de la component més gran quan el grau màxim està acotat.

En les últimes dècades s'ha observat que determinades xarxes del món real —que apareixen en l'economia, la física i les ciències socials— pertanyen a la classe de les anomenades *xarxes món petit*, que es caracteritzen per un *agrupament alt* (la qual cosa vol dir que els vèrtexs estan molt connectats, almenys localment, entre ells) i un *diàmetre petit* (que vol dir que tots els vèrtexs de la xarxa es poden unir globalment per camins curts, de manera que tots els vèrtexs es poden connectar mitjançant un nombre relativament petit de passos). A més a més, el nombre de connexions (és a dir, el grau d'un vèrtex) en moltes xarxes del món real segueix una *lleï de distribució de potències*. Aquesta propietat, entre d'altres, va motivar el model de connexió preferencial introduït i estudiat, per exemple, per Albert i Barabási [2, 7].

Per tal de modelitzar i analitzar xarxes del món real, s'han introduït un gran nombre de grafes aleatoris així com els seus models estocàstics, i molts d'aquests són casos especials dels *grafes aleatoris no homogenis* introduïts per Bollobás, Janson i Riordan [15], on els vèrtexs són de tipus diferents, i la probabilitat de realitzar una aresta depèn del tipus dels seus vèrtexs extrems. En particular, les arestes apareixen independentment i el nombre d'arestes és lineal en el nombre de vèrtexs. Entre altres coses, Bollobás, Janson i Riordan [15] van determinar el punt crític de la fase de transició i l'ordre de la component gegant després de la transició, relacionant el seu model amb processos de ramificació multitypus.

3 Àrees relacionades i aplicacions

Els grafes aleatoris han estat molt estudiats des de la seva introducció, i s'han convertit en un dels temes centrals de les matemàtiques actuals, en part degut al fet que estan íntimament relacionats amb diverses estructures discretes aleatòries com ara superfícies aleatòries, aplicacions aleatòries, matrius aleatòries, problemes aleatoris de satisfactibilitat, els models d'Ising i de Potts i la percolació, i en part perquè són útils per a modelitzar, analitzar i resoldre problemes estructurals i algorísmics que apareixen a les matemàtiques, a la informàtica teòrica, a les ciències naturals, a les ciències socials i a les ciències de la vida [2]. L'estudi intensiu de les estructures aleatòries discretes, en particular l'estudi dels seus fenòmens de transició de fase, ha integrat diverses àrees d'investigació, com ara la matemàtica discreta, la teoria de la probabilitat, la informàtica teòrica i la física estadística.

3.1 Transició de fase

La transició de fase és un canvi sobtat en les propietats d'una estructura complexa produït per l'alteració d'un paràmetre crític. S'observa en molts contextos de les matemàtiques i de les ciències naturals. Aquí hem vist la transició de fase en diversos models de grafs aleatoris en les subseccions 1.3–2.5.

Les transicions de fase amb què tothom està més familiaritzat són les de l'aigua: de gel (sòlid) a aigua (líquid) i d'aigua a vapor (gas). Hi ha dues temperatures crítiques: zero graus Celsius, el punt de congelació de l'aigua, i cent graus Celsius, el punt d'ebullició de l'aigua. A temperatures baixes, en l'estat sòlid, els àtoms i les molècules interactuen intensament amb els seus veïns i estan molt compactificats, típicament en un patró regular. A temperatures intermèdies, les interaccions es debiliten, i això provoca un canvi d'ordre constant però de poc abast. I a temperatures altes, les molècules gairebé no interactuen i mostren un patró dispers, altament dinàmic i bastant aleatori —vegeu la figura 3. El fet intrigant és que aquests canvis induïts per la temperatura no es produeixen de manera contínua sinó que es manifesten dos salts sobtats —transicions de fase— en les temperatures de fusió i d'ebullició.

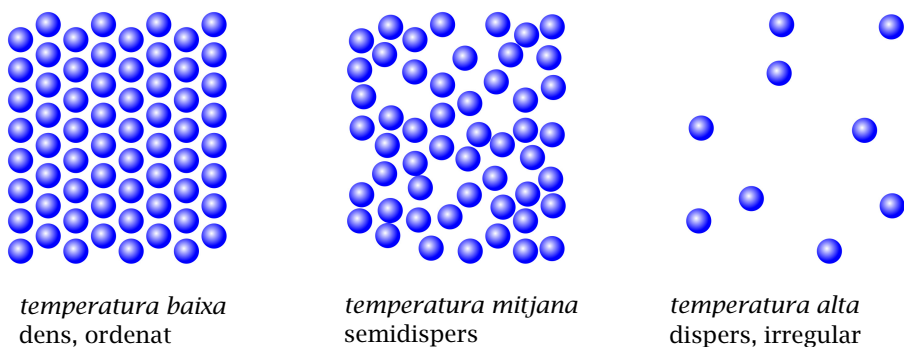


FIGURA 3: Organització d'àtoms o molècules a diferents temperatures.

Un exemple ben conegut que posa de manifest la transició de fase és la percolació. En física, en la ciència de materials i en la geografia, la teoria de la percolació tracta de qüestions relacionades amb el pas d'un fluid o d'un gas a través d'un mitjà porós o bé desordenat. Es pot aplicar a nombrosos problemes sense cap relació aparent, per exemple, els canvis en la superfície de la terra produïts per la meteorologia o per l'erosió, la propagació del foc en els boscos, el funcionament del filtre d'una cigarreta o d'una cafetera.

Suposem que s'aboca un líquid a sobre d'un material porós. El líquid serà capaç d'anar de la part superior a la part inferior? Aquest problema físic es pot modelar matemàticament amb *percolació d'enllaços*: cada enllaç (o aresta o connexió) entre cada dos veïns en un reticle quadrat es pot obrir (de manera que deixa passar el líquid) amb una probabilitat p , o bé es pot

tancar amb probabilitat $1 - p$, de manera independent entre ells. La percolació d'enllaços en el graf complet K_n (és a dir, el graf amb n vèrtexs i $\binom{n}{2}$ arestes) és precisament el graf aleatori binomial $G(n, p)$. Un altre model útil és la *percolació de llocs*, en el qual cada lloc està ocupat amb probabilitat p o bé està buit amb probabilitat $1 - p$.

La reformulació matemàtica de la qüestió anterior és: per a un p donat, quina és la probabilitat que hi hagi un camí obert que vagi des de la part superior a la inferior? És interessant el fet que per a un reticle infinit hi ha un valor crític p_c tal que per a p més petit que p_c la probabilitat que un camí com l'anterior existeixi és 0, mentre que per a p més gran que p_c la probabilitat és 1. En alguns casos p_c es pot calcular explícitament. Per exemple, per a la percolació d'enllaços en el reticle quadrat de dues dimensions $\mathbb{Z}^2$, $p_c = 1/2$, un fet que va ser una qüestió oberta durant més de vint anys i que va ser finalment resolt per Kesten a començaments dels anys vuitanta [41].

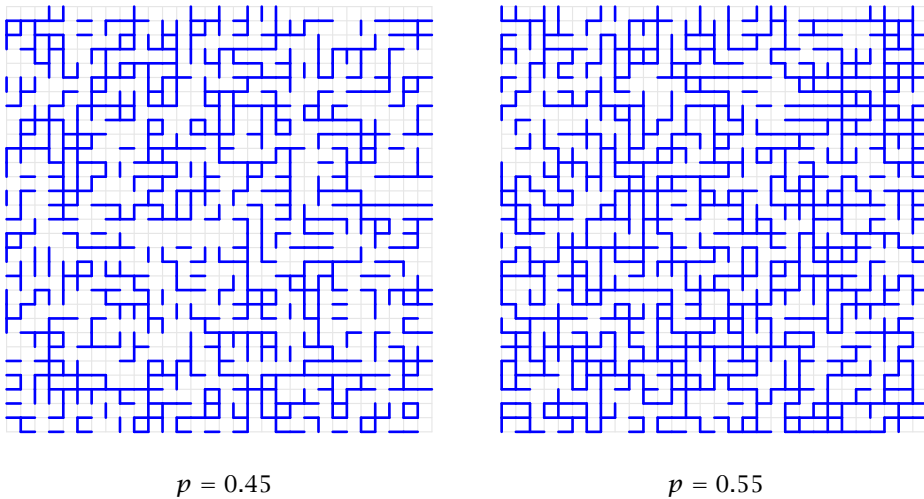


FIGURA 4: Percolació d'enllaços en un reticle quadrat de dimensió 2 per a dos valors de la probabilitat p que existeixi un enllaç entre dos llocs. A l'esquerra: p per sota del llindar de percolació $p_c = 0.5$; no hi ha cap camí que connecti dos costats oposats del quadrat. A la dreta: p per sobre del llindar de percolació; hi ha un camí que connecta el costat de dalt amb el de baix del quadrat (i el de l'esquerra amb el de la dreta).

Desafortunadament, el càlcul exacte de p_c per a la majoria de grafes reticulats infinits no se sap fer. Per a una discussió més detallada de la percolació es poden consultar els llibres titulats *Percolation* de Grimmett [31] i de Bollobás i Riordan [16].

3.2 Ciències socials

L'anàlisi de la comunicació i de les interaccions humanes mitjançant la teoria de grafs determinístics i aleatoris és una eina important en les ciències socials. Un dels exemples més antics i més ben coneguts és el fenomen dels «sis graus de separació» descrit fa anys a [49]: dues persones qualssevol es poden connectar per una cadena de coneguts formada en mitjana per sis persones. De manera anàloga al graf aleatori d'Erdős-Rényi, el graf de les coneixences humanes té un diàmetre petit. Però, a diferència del graf aleatori d'Erdős-Rényi, té un *coeficient d'agrupament* elevat, cosa que el converteix en una «xarxa món petit». La possibilitat que dues persones que tenen un amic comú també es coneguin entre ells és molt més alta que en un graf aleatori. Moltes xarxes d'interaccions humanes tenen aquesta estructura, per exemple, la xarxa de coautors científics, coneguda entre els matemàtics a través del concepte de número d'Erdős.

L'extensió de l'ús d'Internet en la nostra vida diària ha beneficiat molt les ciències socials: els patrons de l'activitat humana a Internet, tal com la navegació a través de pàgines web o la comunicació dins de comunitats virtuals, són una font de dades molt rica. En un exemple recent, l'anàlisi dels patrons dels jocs interactius a Internet ha identificat grups de jugadors que coincideixen amb les fronteres de les regions culturals tradicionals de la Xina [67]. Tot i que aquesta coincidència no és sorprenent en si mateixa, el fet que els grups de jugadors es puguin identificar i analitzar sense utilitzar la informació geogràfica és útil. El comportament a Internet es pot fer servir per a trobar grups culturalment diferents, supervisar-ne l'aparició i l'evolució, les interaccions, la distribució geogràfica, etc. L'estructura de xarxa i la dinàmica d'aquests grups pot ajudar a predir-ne el desenvolupament futur i la seva influència en la societat més enllà dels límits d'Internet.

El patró de la mobilitat humana és rellevant en contextos diferents, per exemple, té conseqüències evidents en la propagació de malalties infeccioses. Modelitzar els desplaçaments humans com a difusió en el graf aleatori d'Erdős-Rényi no té en compte les restriccions geogràfiques, les quals, a diferència del cas de la comunicació per Internet, tenen ara un paper molt important. D'altra banda, el passeig aleatori en un reticle regular negligeix l'efecte dels salts significatius que permet la navegació aèria. En un experiment interessant per a posar de manifest la mobilitat humana, la circulació de bitllets de banc va ser supervisada per voluntaris fent servir webs de seguiment. L'anàlisi de les dades va posar de manifest un decreixement segons la llei de potències de la distribució de les distàncies recorregudes [20]. La presència de salts de llarga distància significa que la propagació de malalties a través d'aquesta xarxa és un procés ràpid i super difusiu. Curiosament, la propagació de les plagues a Europa en el segle XIV no va seguir aquesta tendència, la qual cosa suggereix l'absència d'enllaços de llarg abast i per tant una estructura diferent dels contactes humans a l'època [47].

L'estructura de la xarxa determina l'eficàcia de la divulgació de la informació o de les malalties a través seu [28]. La divulgació serà més eficient en una xarxa

ben connectada (un graf amb diàmetre petit), en la qual dos individus qualssevol no estan gaire lluny l'un de l'altre, o bé un agrupament elevat és una propietat més rellevant de la xarxa? Un experiment en el qual es va crear una comunitat a Internet amb una estructura controlada de la xarxa va posar de manifest que un comportament humà determinat s'escampa més lluny i més de pressa si la xarxa té un agrupament alt que no pas si és aleatòria [22]. El reforç de múltiples veïns és important per tal que un individu adopti un comportament, i en conseqüència per a la seva difusió. Un escenari similar es pot aplicar per a la difusió d'una malaltia que requereixi múltiples contactes, a diferència d'una malaltia contagiosa que es transmet amb un únic contacte. Un altre treball recent identifica models amb una part de la xarxa a la qual no es podrà arribar mai [69]; la mida d'aquesta part depèn altra vegada de l'estructura de la xarxa. Totes aquestes recerques tenen implicacions a l'hora de dissenyar estratègies per a la distribució d'informació o per a les campanyes de vacunació [65]. Durant la redacció d'aquest article va esclatar a l'Àfrica occidental una epidèmia molt greu d'Ebola. L'estructura variable de les xarxes dels contactes socials en les diferents comunitats de la regió afectada es fa servir per a explicar i predir les diferències entre els països implicats pel que fa a la difusió i el desenvolupament posterior de la malaltia [42].

3.3 Xarxes artificials

Grans estructures complexes que es troben a la naturalesa sovint estan formades per interaccions individuals no correlacionades entre un gran nombre dels seus components; en conseqüència no ha de ser sorprenent que els grafs aleatoris proporcionin models adequats per a moltes d'elles. D'altra banda, les estructures artificials es poden pensar com el resultat d'un disseny racional optimitzat amb una finalitat determinada; això faria pensar en una estructura regular sense gaire espai per a l'atzar (circuitos elèctrics, xarxes de telefonia mòbil). Malgrat això, moltes creacions humanes que es poden interpretar com una xarxa manifesten un grau elevat d'aleatorietat, sovint degut al fet que es desenvolupen al llarg del temps (com les xarxes d'Internet) o perquè copien una xarxa preexistent (per exemple, les xarxes d'aeroports, les xarxes elèctriques) o bé perquè estan subjectes a l'atzar o a d'altres restriccions. Per tant, els grafs aleatoris amb les característiques ben seleccionades poden servir com a models útils per a l'evolució i el funcionament de moltes estructures complexes artificials.

Es pot guanyar en perspectiva si s'estudien els efectes de la interacció entre dues o més xarxes. Si la interacció és tal que l'eliminació d'un vèrtex d'una xarxa pot produir l'eliminació de vèrtexs en l'altra xarxa, una cadena d'eliminació de vèrtexs pot portar a una fragmentació a gran escala en les dues xarxes. Un exemple ben conegut d'un col·lapse de dues xarxes acoblades és el de l'apagada elèctrica a Itàlia, l'any 2003, quan una fallada en les centrals elèctriques va provocar la caiguda de la xarxa d'Internet que controlava la xarxa elèctrica [21]. L'estudi de les xarxes interdependents pot ajudar a dissenyar xarxes resistents a aquests tipus de fracassos [55].

Tot i que les xarxes lliures d'escala, com ara Internet, són resistents enfront de l'eliminació aleatòria d'un vèrtex, són molt sensibles a un tipus d'atac: l'eliminació dirigida d'un vèrtex de grau molt alt [3]. El coneixement d'aquest fet es pot utilitzar per a trobar les maneres de controlar la difusió de virus a través d'Internet o per a identificar els punts dèbils i sensibles de la xarxa que requereixen una protecció especial contra els atacs. Entendre les propietats de l'estructura subjacent a la xarxa pot ajudar a la pràctica a dissenyar una xarxa amb un bon equilibri entre efectivitat, redundància, robustesa i cost.

3.4 Ciències de la vida

Els progressos recents en les ciències de la vida han generat una gran quantitat de dades: s'han seqüenciat els genomes d'organismes sencers, s'han identificat proteïnes i els patrons de les seves interaccions, s'han representat xarxes metabòliques associades a les reaccions bioquímiques. L'anàlisi detallada de les xarxes d'interacció gènica i proteica ens hauria d'ajudar a entendre les propietats de la xarxa que estan determinades per la seva estructura a gran escala més que no pas pels detalls de les interaccions individuals, per exemple, com augmenta el risc de patir una malaltia una combinació de mutacions de diverses proteïnes, de quina manera la topologia de la xarxa d'una proteïna n'afecta la robustesa contra mutacions aleatòries, o bé com la xarxa pot haver evolucionat al llarg del temps [8].

Sovint les xarxes biològiques són lliures d'escala i mostren una distribució molt àmplia del grau dels vèrtexs. Aquestes xarxes són robustes enfront de l'eliminació d'un vèrtex triat aleatòriament [3], una propietat important de cara a la resistència a l'eliminació aleatòria d'una mutació unitària, per exemple, que fa que una proteïna no faci el seu efecte.

En els grafs que representen xarxes biològiques, alguns subgrafs (anomenats *motius*) es poden identificar com a subunitats que compleixen una funció ben definida. En conseqüència, l'anàlisi d'una xarxa biològica en termes dels subgrafs pot posar de manifest subunitats desconegudes fins ara i que ens poden ajudar a entendre la funcionalitat d'una gran xarxa [32].

3.5 El cervell

La teoria dels grafs deterministes o bé aleatoris ens pot ajudar a descriure, i en el futur esperem que també a entendre, la que és probablement l'estructura més complexa de la naturalesa: el cervell [53]. La xarxa de neurones interconnectades del cervell ha estat modelitzada com un graf aleatori amb diverses propietats (per exemple, és una xarxa lliure d'escala). Mentre que el «cervell» d'un simple cuc *C. elegans*, un organisme model àmpliament estudiat, està format per 302 neurones connectades per unes 7300 sinapsis, i ha estat representat amb detall [66], el cervell humà conté aproximadament 10^{11} neurones, amb un nombre de sinapsis difícil d'estimar (10^{14} – 10^{15} ?) i no diguem de representar. La manera com les neurones estan connectades i interactuen entre elles determina en gran manera el funcionament del cervell. Per exemple, hi ha

evidències que l'estructura de connectivitat funcional dins del cervell canvia en pacients amb la malaltia d'Alzheimer: les xarxes d'activitat presenten un nivell d'agrupament més baix i s'assemblen més a una xarxa aleatòria que les d'un cervell sa [63]. Els estudis experimentals de l'activitat espontània del cervell —l'anàlisi de pics elèctrics produïts per les neurones, i de la mida i la durada de les allaus d'activitat neuronal— sovint donen resultats que es poden descriure amb distribucions amb llei de potències (lliure d'escala). Això ha portat a la hipòtesi que el cervell, vist com una xarxa de neurones, pot operar en un estat crític, un estat pròxim a una fase de transició. Això és rellevant, atès que diverses propietats de les xarxes relacionades amb l'eficiència de la comunicació, amb el rang dinàmic de resposta, etc., s'optimitzen en el punt crític [9].

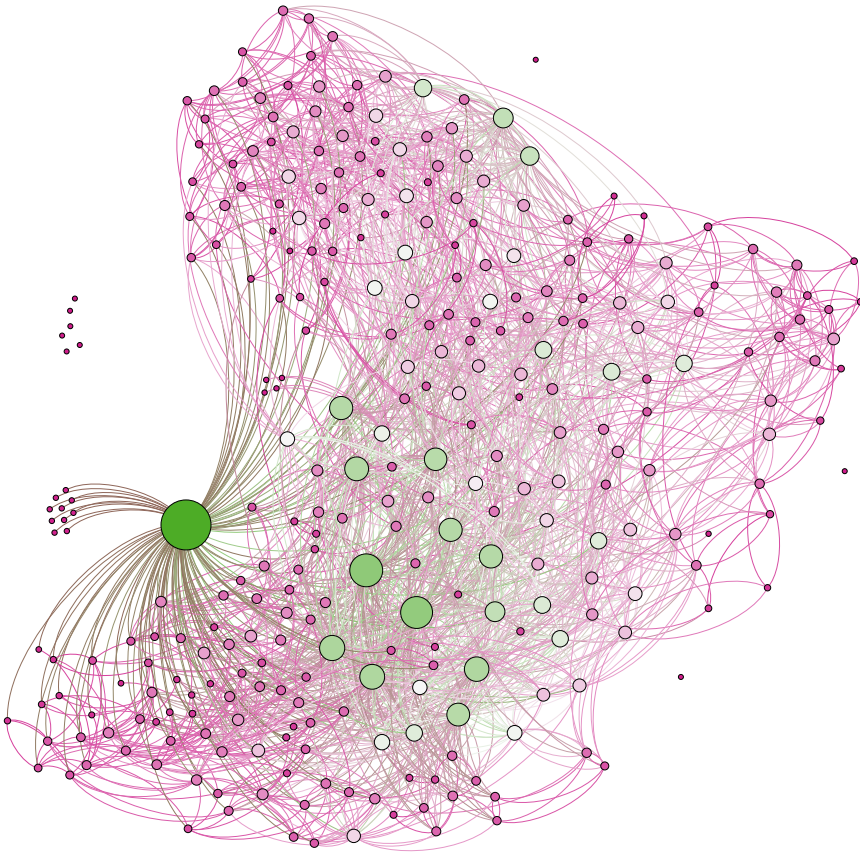


FIGURA 5: El graf que representa les connexions entre les neurones del *C. elegans*. La mida i la tonalitat de gris dels vèrtexs es corresponen amb el seu grau. Les dades estan tretes de [68].

4 Conclusió

Aquest article ha pretès donar una idea de l'evolució del camp dels grafs aleatoris al llarg dels últims cinquanta anys, des de la primera definició de graf aleatori fins a una teoria matemàtica rica amb aplicacions a moltes disciplines científiques. S'ha de dir, de totes maneres, que aquest article no és un repàs exhaustiu de la teoria dels grafs aleatoris, sinó més aviat un recull breu d'alguns temes i resultats especials que tenen un interès particular per als autors.

Des d'un punt de vista teòric, s'ha posat de manifest de manera especial el fenomen fascinant de la transició de fase en termes de l'aparició d'una component gegant en un graf aleatori. Malgrat això, hi ha també altres qüestions importants i interessants dels grafs aleatoris, com ara subgrafs petits, cicles llargs, diàmetre, *cliques*, conjunts independents i el número cromàtic, per citar-ne unes quantes. Per a una descripció més completa d'aquests temes el lector pot consultar dos llibres excel·lents sobre grafs aleatoris: el de Bollobás [14] i el de Janson, Łuczak i Ruciński [33].

Des del punt de vista de les aplicacions, la teoria dels grafs aleatoris s'ha mostrat adequada per a la descripció i l'anàlisi d'estructures complexes que apareixen arreu des de la naturalesa fins a la societat, fins i tot en el cervell. D'altra banda, diverses aplicacions continuen motivant i guiant l'estudi dels grafs aleatoris.

L'expansió de la teoria dels grafs aleatoris i les seves aplicacions mostra una altra vegada com les idees matemàtiques més abstractes ens poden ajudar a entendre el «món real».

Agraïments

La primera autora ha tingut l'ajuda de l'Austrian Science Fund (FWF): P26826-N26 i W1230. Aquell treball ha tingut parcialment el suport de NAWI Graz.

Referències

- [1] ACHLIOPTAS, D.; D'SOUZA, R. M.; SPENCER, J. «Explosive percolation in random networks». *Science*, 323 (5920) (2009), 1453-1455.
- [2] ALBERT, R.; BARABÁSI, A.-L. «Statistical mechanics of complex networks». *Rev. Modern Phys.*, 74 (1) (2002), 47-97.
- [3] ALBERT, R.; JEONG, H.; BARABÁSI, A.-L. «Error and attack tolerance of complex network». *Nature*, 406 (6794) (2000), 378-382.
- [4] ALDOUS, D. «Brownian excursions, critical random graphs and the multiplicative coalescent». *Ann. Probab.*, 25 (2) (1997), 812-854.
- [5] ARONSHTAM, L.; LINIAL, N. «When does the top homology of a random simplicial complex vanish?». *Random Structures Algorithms*, 46 (1) (2015), 26-35.

- [6] ARONSHTAM, L.; LINIAL, N.; ŁUCZAK, T.; MESHULAM, R. «Collapsibility and vanishing of top homology in random simplicial complexes». *Discrete Comput. Geom.*, 49 (2) (2013), 317–334.
- [7] BARABÁSI, A.-L.; ALBERT, R. «Emergence of scaling in random networks». *Science*, 286 (5439) (1999), 509–512.
- [8] BARABÁSI, A.-L.; GULBAHCE, N.; LOSCALZO, J. «Network medicine: a network-based approach to human disease». *Nat. Rev. Genet.*, 12 (1) (2011), 56–68.
- [9] BEGGS, J. M.; TIMME, N. «Being critical of criticality in the brain». *Front. Physiol.*, 3 (2012), article 163, 14 pàg.
- [10] BEHRISCH, M.; COJA-OGHLAN, A.; KANG, M. «The order of the giant component of random hypergraphs». *Random Structures Algorithms*, 36 (2) (2010), 149–184.
- [11] BEHRISCH, M.; COJA-OGHLAN, A.; KANG, M. «Local limit theorems for the giant component of random hypergraphs». *Combin. Probab. Comput.*, 23 (3) (2014), 331–366.
- [12] BOHMAN, T.; FRIEZE, A. «Avoiding a giant component». *Random Structures Algorithms*, 19 (1) (2001), 75–85.
- [13] BOLLOBÁS, B. «The evolution of random graphs». *Trans. Amer. Math. Soc.*, 286 (1) (1984), 257–274.
- [14] BOLLOBÁS, B. *Random Graphs*. 2a ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2001. (Cambridge Studies in Advanced Mathematics; 73)
- [15] BOLLOBÁS, B.; JANSON, S.; RIORDAN, O. «The phase transition in inhomogeneous random graphs». *Random Structures Algorithms*, 31 (1) (2007), 3–122.
- [16] BOLLOBÁS, B.; RIORDAN, O. *Percolation*. Nova York: Cambridge University Press, 2006.
- [17] BOLLOBÁS, B.; RIORDAN, O. «A simple branching process approach to the phase transition in $G_{n,p}$ ». *Electron. J. Combin.*, 19 (4) (2012), article 21, 8 pàg.
- [18] BOLLOBÁS, B.; RIORDAN, O. «Asymptotic normality of the size of the giant component in a random hypergraph». *Random Structures Algorithms*, 41 (4) (2012), 441–450.
- [19] BOLLOBÁS, B.; RIORDAN, O. «Counting connected hypergraphs via the probabilistic method». *Combin. Probab. Comput.*, 25 (1) (2016), 21–75.
- [20] BROCKMANN, D.; HUFNAGEL, L.; GEISEL, T. «The scaling laws of human travel». *Nature*, 439 (7075) (2006), 462–465.
- [21] BULDYREV, S. V.; PARSHANI, R.; PAUL, G.; STANLEY, H. E.; HAVLIN, S. «Catastrophic cascade of failures in interdependent networks». *Nature*, 464 (7291) (2010), 1025–1028.
- [22] CENTOLA, D. «The spread of behavior in an online social network experiment». *Science*, 329 (5996) (2010), 1194–1197.

- [23] CHUNG, F.; LU, L. «Connected components in random graphs with given expected degree sequences». *Ann. Comb.*, 6 (2) (2002), 125–145.
- [24] COOLEY, O.; KANG, M.; KOCH, C. «The size of the giant components in random hypergraphs». Manuscrit.
- [25] COOLEY, O.; KANG, M.; PERSON, Y. «Giant components in random hypergraphs». Manuscrit.
- [26] ERDŐS, P.; RÉNYI, A. «On random graphs I.». *Publ. Math. Debrecen*, 6 (1959), 290–297.
- [27] ERDŐS, P.; RÉNYI, A. «On the evolution of random graphs». *Magyar Tud. Akad. Mat. Kutató Int. Közl.*, 5 (1960), 17–61.
- [28] EUBANK, S.; GUCLU, H.; KUMAR, V. S. A.; MARATHE, M. V.; SRINIVASAN, A.; TOROCZKAI, Z.; WANG, N. «Modelling disease outbreaks in realistic urban social networks». *Nature*, 429 (6988) (2004), 180–184.
- [29] GILBERT, E. N. «Random graphs». *Ann. Math. Statist.*, 30 (1959), 1141–1144.
- [30] GIMÉNEZ, O.; NOY, M. «Asymptotic enumeration and limit laws of planar graphs». *J. Amer. Math. Soc.*, 22 (2) (2009), 309–329.
- [31] GRIMMETT, G. *Percolation*. 2a ed. Berlín: Springer, 1999. (Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften; 321)
- [32] GUIMERÀ, R.; AMARAL, L. A. N. «Functional cartography of complex metabolic networks». *Nature*, 433 (7028) (2005), 895–900.
- [33] JANSON, S.; ŁUCZAK, T.; RUCIŃSKI, A. *Random Graphs*. Nova York: Wiley-Interscience, 2000. (Wiley-Interscience Series in Discrete Mathematics and Optimization)
- [34] JANSON, S.; SPENCER, J. «Phase transitions for modified Erdős-Rényi processes». *Ark. Mat.*, 50 (2) (2012), 305–329.
- [35] KANG, M. «Random graphs: from nature to society to the brain». Número especial del *Math. Intelligencer* dedicat al SEOUL ICM 2014, Springer, 42–44.
- [36] KANG, M.; ŁUCZAK, T. «Two critical periods in the evolution of random planar graphs». *Trans. Amer. Math. Soc.*, 364 (8) (2012), 4239–4265.
- [37] KANG, M.; PERKINS, W.; SPENCER, J. «The Bohman-Frieze process near criticality». *Random Structures Algorithms*, 43 (2) (2013), 221–250.
- [38] KANG, M.; SEIERSTAD, T. G. «The critical phase for random graphs with a given degree sequence». *Combin. Probab. Comput.*, 17 (1) (2008), 67–86.
- [39] KAROŃSKI, M.; ŁUCZAK, T. «The phase transition in a random hypergraph». *J. Comput. Appl. Math.*, 142 (1) (2002), 125–135.
- [40] KARP, R. M. «The transitive closure of a random digraph». *Random Structures Algorithms*, 1 (1) (1990), 73–93.
- [41] KESTEN, H. *Percolation Theory for Mathematicians*. Boston, Mass.: Birkhäuser, 1982. (Progress in Probability and Statistics; 2)

- [42] KISKOWSKI, M. A. «Description of the early growth dynamics of 2014 West Africa Ebola epidemic». Preprint (2014). Disponible a arXiv:1410.5409.
- [43] LINIAL, N.; MESHULAM, R. «Homological connectivity of random 2-complexes». *Combinatorica*, 26 (4) (2006), 475–487.
- [44] ŁUCZAK, T. «Component behavior near the critical point of the random graph process». *Random Structures Algorithms*, 1 (3) (1990), 287–310.
- [45] ŁUCZAK, T. «Sparse random graphs with a given degree sequence». A: *Random Graphs*. Vol. 2 (Poznań, 1989). Nova York: Wiley-Intersci. Publ., Wiley, 1992, 165–182.
- [46] ŁUCZAK, T.; PITTEL, B. «Components of random forests». *Combin. Probab. Comput.*, 1 (1) (1992), 35–52.
- [47] MARVEL, S. A.; MARTIN, T.; DOERING, C. R.; LUSSEAU, D.; NEWMAN, M. E. J. «The small-world effect is a modern phenomenon». Preprint (2013). Disponible a arXiv:1310.2636v1.
- [48] MCDIARMID, C.; STEGER, A.; WELSH, D. J. A. «Random planar graphs». *J. Combin. Theory Ser. B*, 93 (2) (2005), 187–205.
- [49] MILGRAM, S. «The small-world problem». *Psychology Today*, 1 (1) (1967), 61–67.
- [50] MOLLOY, M.; REED, B. «A critical point for random graphs with a given degree sequence». A: *Proceedings of the Sixth International Seminar on Random Graphs and Probabilistic Methods in Combinatorics and Computer Science, "Random Graphs '93"* (Poznań, 1993). *Random Structures Algorithms*, 6 (2–3) (1995), 161–179.
- [51] MOLLOY, M.; REED, B. «The size of the giant component of a random graph with a given degree sequence». *Combin. Probab. Comput.*, 7 (3) (1998), 295–305.
- [52] NEWMAN, M. E. J.; STROGATZ, S. H.; WATTS, D. J. «Random graphs with arbitrary degree distributions and their applications». *Phys. Rev. E*, 64 (2) (2001), 026118.
- [53] PAPO, D.; BULDÚ, J. M.; BOCCALETTI, S.; BULLMORE, E. T. «Introduction: Complex network theory and the brain». *Phil. Trans. R. Soc. B*, 369 (2014), 20130520.
- [54] PITTEL, B.; WORMALD, N. C. «Counting connected graphs inside-out». *J. Combin. Theory Ser. B*, 93 (2) (2005), 127–172.
- [55] QUILL, E. «When networks network: Once studied solo, systems display surprising behavior when they interact». *Science News*, 182 (6) (2012), 18–25.
- [56] RIORDAN, O. «The phase transition in the configuration model». *Combin. Probab. Comput.*, 21 (1–2) (2012), 265–299.
- [57] RIORDAN, O.; WARNKE, L. «Explosive percolation is continuous». *Science*, 333 (6040) (2011), 322–324.

- [58] RIORDAN, O.; WARNKE, L. «Achlioptas process phase transitions are continuous». *Ann. Appl. Probab.*, 22 (4) (2012), 1450–1464.
- [59] RIORDAN, O.; WARNKE, L. «The evolution of subcritical Achlioptas processes». *Random Structures Algorithms*, 47 (1) (2015), 174–203.
- [60] SATO, C. M.; WORMALD, N. «Asymptotic enumeration of sparse connected 3-uniform hypergraphs». Preprint (2014). Disponible a arXiv:1401.7381.
- [61] SCHMIDT-PRUZAN, J.; SHAMIR, E. «Component structure in the evolution of random hypergraphs». *Combinatorica*, 5 (1) (1985), 81–94.
- [62] SPENCER, J.; WORMALD, N. «Birth control for giants». *Combinatorica*, 27 (5) (2007), 587–628.
- [63] STAM, C. J.; DE HAAN, W.; DAFFERTSHOFER, A.; JONES, B. F.; MANSHANDEN, I.; VAN CAPPELLEN VAN WALSUM, A. M.; MONTEZ, T.; VERBUNT, J. P. A.; DE MUNCK, J. C.; VAN DIJK, B. W.; BERENDSE, H. W.; SCHELTENS, P. «Graph theoretical analysis of magnetoencephalographic functional connectivity in Alzheimer's disease». *Brain*, 132 (1) (2009), 213–224.
- [64] STEPANOV, V. E. «The probability of the connectedness of a random graph $G_m(t)$ ». *Theor. Probability Appl.*, 15 (1970), 55–67.
- [65] TAKEUCHI, F.; YAMAMOTO, K. «Effectiveness of realistic vaccination strategies for contact networks of various degree distributions». *J. Theoret. Biol.*, 243 (1) (2006), 39–47.
- [66] VARSHNEY, L. R.; CHEN, B. L.; PANIAGUA, E.; HALL, D. H.; CHKLOVSKII, D. B. «Structural properties of the *Caenorhabditis elegans* neuronal network». *PLoS Comput. Biol.*, 7 (2) (2011), 1001066.
- [67] WANG, X.; MAO, W.; LIU, C. «Games and culture: Using online-gaming data to cluster Chinese regional cultures». Preprint (2013). Disponible a arXiv:1310.0621.
- [68] WATTS, D. J.; STROGATZ, S. H. «Collective dynamics of 'small-world' networks». *Nature*, 393 (6684) (1998), 440–442.
- [69] ZHANG, Z.-K.; ZHANG, C.-X.; HAN, X.-P.; LIU, C. «Emergence of blind areas in information spreading». *PLoS ONE*, 9 (4) (2014), e95785.

TECHNISCHE UNIVERSITÄT GRAZ
 INSTITUT FÜR OPTIMIERUNG UND DISKRETE MATHEMATIK
 STEYRERGASSE 30
 8010 GRAZ, AUSTRIA
 kang@math.tugraz.at, z.petrasek@tugraz.at

English summaries

Joaquim Bruna and Joan del Castillo

A note on Financial Mathematics

Around 1970, the financial world underwent a revolution with the commercialization of the so-called derivative financial products and, above all, the introduction of the Black-Scholes model to value them. The aim of this article is to describe this model in a self-contained and most basic manner possible, essentially following the discrete approach of Cox, Ross and Rubinstein. To do so, it is first necessary to describe the Samuelson model for the underlying asset, based on geometric Brownian motion. In the final section, we comment on the accuracy of these models and on how the Black-Scholes formula is used in the everyday practice.

Keywords: normal law, Brownian motion, stochastic processes, financial assets, option pricing, arbitration, Black-Scholes model, risk coverage.

MSC2010 Subject Classification: 91G20, 91G60, 91G70.

Enrique Casanovas Ruiz-Fornells

Definability in mathematical structures

We discuss the notion of definability of relations, functions and elements of a mathematical structure with the help of the formal language of first-order logic and within the framework of model theory. We give some examples of definability issues in numerical systems which are familiar to every mathematician and we show how the analysis of the complexity of definable relations in a structure provides valuable information on the decidability and categoricity problems of its theory.

Keywords: definability, model theory, axioms, decidability, categoricity.

MSC2010 Subject Classification: 03C07, 03C40, 03C45.

Mihyun Kang and Zdeněk Petrášek

Random graphs: theory and applications from nature to society to the brain

The theory of random graphs deals with asymptotic properties of graphs equipped with a certain probability distribution; for example, it studies how the component structure of a uniform random graph evolves as the number of edges increases. Since the foundation of the theory of random graphs by Erdős and Rényi five decades ago, various random graph models have been introduced and studied. Graph theory has meanwhile found its way into other sciences as a rich source of models describing fundamental aspects of a broad range of complex phenomena. This article is a gentle introduction to the theory of random graphs and its recent developments (with focus on the phase transition and critical phenomena, a favourite topic of the first author) and applications.

This is an extended version of the article entitled «Random graphs: from nature to society to the brain» [35] published in *Seoul Intelligencer*, a special issue of the *Mathematical Intelligencer*, on the occasion of International Congress of Mathematicians in Seoul in 2014.

Keywords: giant component, phase transition, limit theorems, random graphs.

MSC2010 Subject Classification: 05C80, 05C65.

Instruccions per als autors

Els articles sotmesos a publicació s'han d'enviar als editors o a qualsevol membre del comitè editorial, per correu electrònic, preferentment en format PDF. Els originals han de contenir la versió anglesa del títol, un resum breu en català i en anglès, paraules clau en català i en anglès i els codis de la classificació per matèries MSC2010.

Les versions definitives dels articles acceptats s'han de presentar en codi $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$, preferentment en l'estil $\text{L}_{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ propi del BUTLLETÍ. Aquest estil es pot obtenir a les pàgines web de la Societat Catalana de Matemàtiques (SCM). Fem notar que en aquesta publicació s'utilitza preferentment el punt per a separar decimals, en lloc de la coma recomanada per l'IEC, per poder facilitar la comprensió de les expressions matemàtiques. Per tal d'accelerar el procés de producció, es prega als autors que segueixin les indicacions contingudes en el document d'exemple.

La versió en paper del BUTLLETÍ s'imprimeix en blanc i negre. Quan un article contingui figures en color i es consideri convenient, l'autor proporcionarà una versió dels gràfics substituint el color per tons de grisos i línies de gruix variable. Així mateix modificarà els comentaris que facin referència al color de les figures. En qualsevol cas el BUTLLETÍ publicarà l'original en color en el seu format electrònic.

Els autors dels articles publicats al BUTLLETÍ en retenen el dret de còpia (*copyright*) i autoritzen l'IEC a difondre'ls, tant a través de la publicació impresa com mitjançant els portals digitals propis o d'altres amb què s'estableixin els convenis oportuns a aquest efecte. És responsabilitat dels autors assegurar que es disposa dels drets de reproducció dels gràfics i de les figures que hi apareguin. Cada autor rebrà una còpia en PDF d'alta qualitat de la versió digital del seu article i un exemplar imprès del número del BUTLLETÍ en el qual es publiqui.

La correspondència administrativa relacionada amb el BUTLLETÍ s'ha d'adreçar a l'SCM.

Comitè editorial

Julià Cufi (editor en cap)
Departament de Matemàtiques
Universitat Autònoma de Barcelona
jcufi@mat.uab.cat

Bartomeu Coll
Dep. de Matemàtiques i Informàtica
Universitat de les Illes Balears
tomeu.coll@uib.cat

Núria Fagella
Dep. de Matemàtiques i Informàtica
Universitat de Barcelona
fagella@maia.ub.es

Armengol Gasull
Departament de Matemàtiques
Universitat Autònoma de Barcelona
gasull@mat.uab.cat

Antoni Guillamon
Departament de Matemàtiques
Universitat Politècnica de Catalunya
antoni.guillamon@upc.edu

Gábor Lugosi
ICREA i Departament d'Economia
Universitat Pompeu Fabra
gabor.lugosi@upf.edu

Rosa Camps (editora adjunta)
Departament de Matemàtiques
Universitat Autònoma de Barcelona
rcamps@mat.uab.cat

Marc Noy
Departament de Matemàtiques
Universitat Politècnica de Catalunya
marc.noy@upc.edu

Francesc Planas
Departament de Matemàtiques
Universitat Politècnica de Catalunya
francesc.planas@upc.edu

Agustí Reventós
Departament de Matemàtiques
Universitat Autònoma de Barcelona
agusti@mat.uab.cat

Joan Saldaña
Dep. d'Informàtica, Mat. Aplicada i Estadística
Universitat de Girona
joan.saldana@udg.edu

Marta Sanz-Solé
Dep. de Matemàtiques i Informàtica
Universitat de Barcelona
marta.sanz@ub.edu



Societat Catalana de Matemàtiques

La **Societat Catalana de Matemàtiques (SCM)** és una societat filial de l'Institut d'Estudis Catalans, que continua les activitats de la Secció de Matemàtiques de la Societat Catalana de Ciències, que fou fundada per l'Institut l'any 1931. Les finalitats de l'**SCM** són: el conreu de les ciències matemàtiques, l'extensió del seu coneixement en la societat catalana, el foment del seu ensenyament i de la seva investigació teòrica i aplicada, així com la publicació de tota mena de treballs que s'adeqüin a aquests objectius. L'**SCM** desenvolupa les seves activitats en les terres de llengua i cultura catalanes. El català és, doncs, la llengua pròpia de l'**SCM** i la que és usada normalment en tots els seus actes i publicacions.

L'**SCM** edita les publicacions periòdiques *SCM/Notícies* i *Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques*. Els socis de l'**SCM** reben, gratuïtament, aquestes dues publicacions.

L'**SCM** té convenis de reciprocitat amb diverses societats matemàtiques d'arreu del món, mitjançant els quals els socis de l'**SCM** obtenen una reducció en la quota de soci d'aquestes societats. Així mateix, els socis de l'**SCM** poden fer-se socis de la Societat Matemàtica Europea pagant una quota complementària.

La Junta Directiva de l'**SCM** està constituïda per les persones següents:

PRESIDENT: Xavier Jarque i Ribera

VICEPRESIDENT: Enric Ventura i Capell

ADJUNTA DE LA VICEPRESIDÈNCIA: Iolanda Guevara i Casanova

SECRETARI: Albert Ruiz i Cirera

TRESORERA: Natàlia Castellana i Vila

VOCALS: Núria Fagella i Rabionet, Josep Grané i Manlleu, Agustí Reventós i Tarrida, Carles Romero i Chesa, Oriol Serra i Albó, Esther Silberstein, Manel Udina i Abelló

DELEGAT DE L'IEC: Joan Girbau i Badó

L'adreça de l'**SCM** és carrer del Carme, 47, 08001 Barcelona. Telèfon: 933 248 583. Fax: 932 701 180. Correu electrònic: scm@iec.cat. Adreça web: <http://scm.iec.cat>.

El Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques publica, en llengua catalana, exposicions matemàtiques de qualitat, que puguin interessar a un nombre elevat de lectors. Es donarà prioritat a aquells treballs en què destaquin la claredat d'exposició i l'interès general del tema. El Butlletí està obert a tots els camps de la matemàtica i també als aspectes matemàtics de les ciències experimentals, la tecnologia, l'economia, etc., així com a altres àrees, com la història, la didàctica i la filosofia, sempre que els treballs tinguin un component matemàtic important. També tenen cabuda al Butlletí aquells articles que desenvolupin un aspecte significatiu de la problemàtica de la professió matemàtica al nostre país.

El Butlletí publica un volum a l'any, dividit en dos números, que es trameten gratuïtament a tots els socis. El Butlletí es publica també en format electrònic. L'edició electrònica del Butlletí pot obtenir-se des del portal de revistes científiques en línia de l'IEC o al servidor <http://scm.iec.cat>.

La correspondència administrativa s'ha d'adreçar a la Societat Catalana de Matemàtiques.

Editor en cap _____

Julia Cufí

Departament de Matemàtiques

Universitat Autònoma de Barcelona

Editora adjunta _____

Rosa Camps

Departament de Matemàtiques

Universitat Autònoma de Barcelona

Comitè editorial _____

Bartomeu Coll

Dep. de Matemàtiques i Informàtica

Universitat de les Illes Balears

Núria Fagella

Dep. de Matemàtica Aplicada i Anàlisi

Universitat de Barcelona

Armengol Gasull

Departament de Matemàtiques

Universitat Autònoma de Barcelona

Antoni Guillamon

Departament de Matemàtiques

Universitat Politècnica de Catalunya

Gábor Lugosi

ICREA i Departament d'Economia

Universitat Pompeu Fabra

Marc Noy

Departament de Matemàtica Aplicada II

Universitat Politècnica de Catalunya

Francesc Planas

Departament de Matemàtica Aplicada I

Universitat Politècnica de Catalunya

Agustí Reventós

Departament de Matemàtiques

Universitat Autònoma de Barcelona

Joan Saldaña

Dep. d'Informàtica, Mat. Aplicada i Estadística

Universitat de Girona

Marta Sanz-Solé

Dep. de Probabilitats, Lògica i Estadística

Universitat de Barcelona

Societat Catalana de Matemàtiques

Carrer del Carme, 47 - 08001 Barcelona

tel. 933 248 583 - fax 932 701 180

scm@iec.cat - <http://scm.iec.cat>